

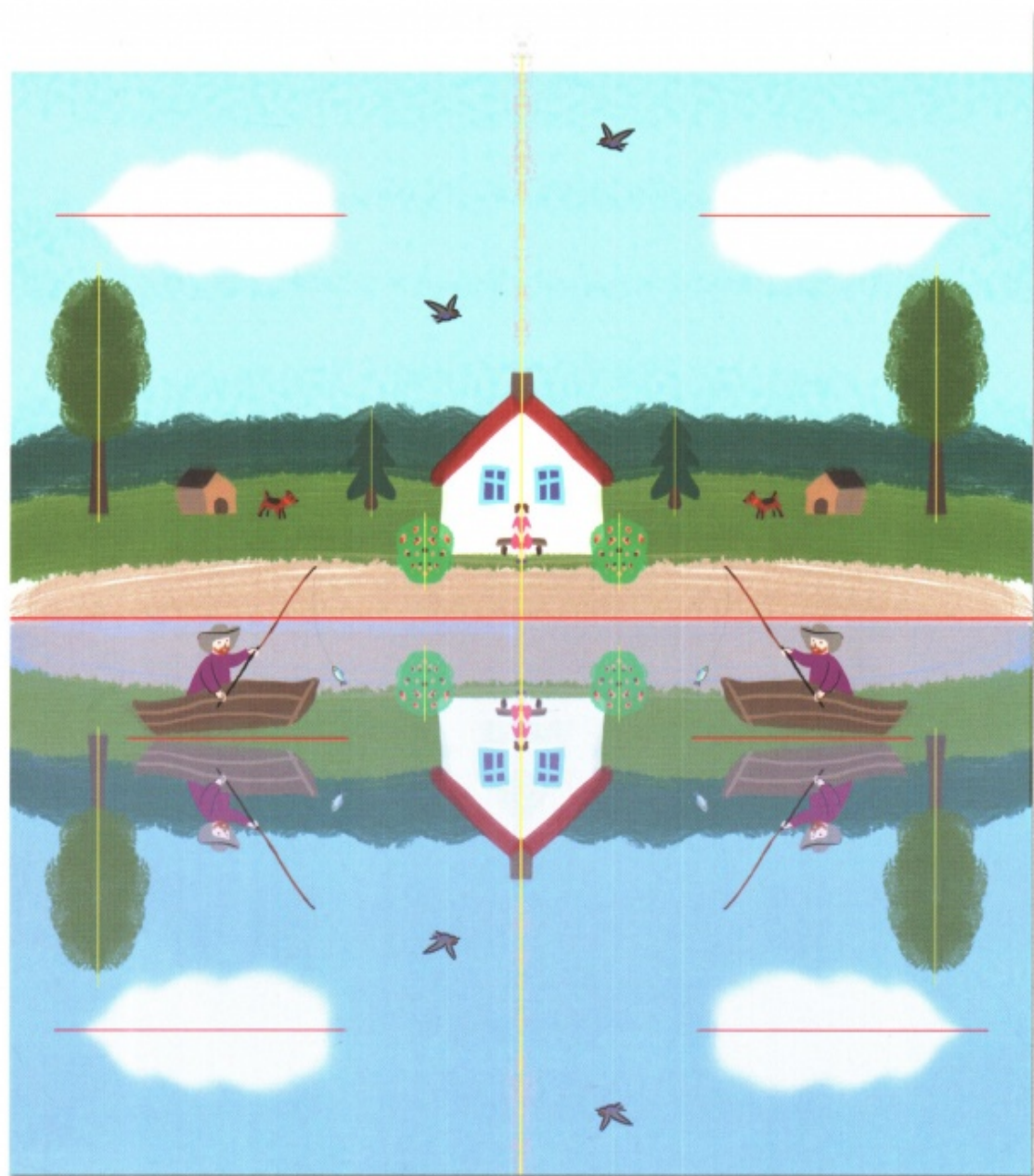
СЕНТЯБРЬ/ДЕКАБРЬ

ISSN 0130-2221

2011 • №5-6

КВАНТ⁺

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



Завиток



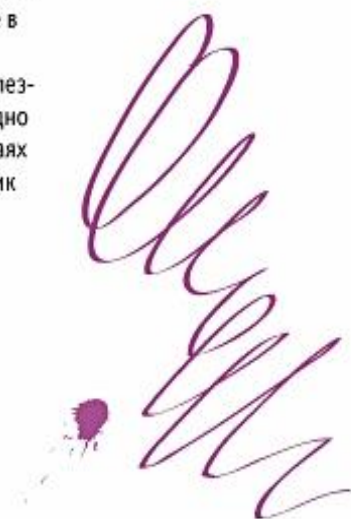
В программу ежегодного международного съезда любителей головоломок входит конкурс новых изобретений. В этом году на XXXI съезде в конкурсе участвовали 72 головоломки.

Почти все они очень интересны, а многие еще и красиво исполнены. Но обычно их не так просто сделать самому – требуются специальные станки и инструменты. Поэтому особенно приятно, что среди конкурсанток есть простые в изготовлении, но сложные в решении головоломки.

Вот одна из них, придуманная Томом Ли. Нужно снять железную трубочку с веревки. Вся конструкция должна свободно проходить в веревочное кольцо, а размеры петель на краях проволоки подбираются такими, чтобы трубочка и шарик сквозь них не пролезали.

Желаем удачи!

Е. Елифанов



- 2 Человек-университет (к 300-летию со дня рождения
М.В.Ломоносова). *С.Филонович*
9 Язык симметрии (окончание). *Д.Мамфорд, Д.Райт, К.Сирис*
-

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 15 Задачи М2236–М2245, Ф2243–Ф2252
17 Решения задач М2214–М2228, Ф2228–Ф2233
-

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 25 Задачи
26 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
26 Древняя наука и «Таинственный остров». *А.Жуков*
29 Задача для мистера Холмса. *А.Жуков*
-

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Михаил Васильевич Ломоносов
-

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 31 Графический способ решения одной физической задачи.
Д.Бешимбай, О.Конакбаев
34 Расчет электроемкости конденсаторов. *В.Зварич, В.Ляховец*
36 Соль, огонь и вода. *А.Стасенко*
-

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 38 Загадки поляризации. *К.Коханов*
-

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 41 Решение задач на тонкие линзы. *А.Черноуцан*
-

ОЛИМПИАДЫ

- 47 Заключительный этап XXXVII Всероссийской олимпиады
школьников по математике
49 Заключительный этап XLV Всероссийской олимпиады
школьников по физике
53 LII Международная математическая олимпиада
54 XLII Международная физическая олимпиада
56 Всероссийская студенческая олимпиада по физике 2011 года
-

ИНФОРМАЦИЯ

- 57 Очередной набор в ОЛ ВЗМШ
62 Федеральная заочная физико-техническая школа при МФТИ
66 Новый прием в школы-интернаты при университетах
68 О некоторых интересных конференциях школьников

68 Ответы, указания, решения
79 Напечатано в 2011 году
Нам пишут (40)
-

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Язык симметрии»*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

Человек-университет

(к 300-летию со дня рождения М.В.Ломоносова)

С.ФИЛОНОВИЧ

ИМЯ МИХАИЛА ВАСИЛЬЕВИЧА ЛОМОНОСОВА знает практически каждый россиянин. Этот человек является символом того потенциала, которым обладает наш народ, давший человечеству Достоевского и Толстого, Капицу и Ландау, Чайковского и Шостаковича, Кандинского и Малевича. М.В.Ломоносов был современником И.Ньютона и Дж.Уатта, И.С.Баха и Дж.Свифта, Вольтера и А.Смита. Он жил в интереснейшую эпоху, когда закладывались основы привычной нам цивилизации. При этом Ломоносов был не только свидетелем, но и самым активным участником важнейших исторических событий, происходивших в науке, культуре, образовании. Жизнь Михаила Васильевича невозможно сколь-нибудь подробно описать в одной статье. Поскольку сам Ломоносов был первым россиянином, занимавшимся разработкой техники мозаики, постараемся нарисовать мозаичный портрет этого человека.

Контур жизни

Михаил Васильевич Ломоносов родился в деревне Мишанинская Архангелогородской губернии 8 (19) ноября 1711 года в семье помора Василия Дорофеевича. Несмотря на то что отца Ломоносова можно было считать человеком вполне зажиточным, детство мальчика вряд ли возможно назвать счастливым: его мать умерла, когда Мише было всего девять лет. Вскоре после этого печального события отец Ломоносова женился во второй раз, но во втором браке он прожил всего три года. После смерти второй жены Василий Дорофеевич женился в третий раз. О третьей жене известно, что она стала «злой и завистливой мачехой» для тринадцатилетнего Михаила.

Нельзя, однако, представлять детство мальчика только в черном цвете. Само место рождения и его сословная принадлежность были вполне благоприятными для будущей карьеры Михаила. На Севере России жили люди, не знавшие крепостного права. Поэтому им дозволялось многое из того, что было недоступно большинству россиян.

Первичное образование Ломоносов получил на родине. Уже в юные годы у него возникло желание продолжить учебу, но отец был сторонником более традиционного устройства жизни сына. Он хотел женить его, когда Михаилу не исполнилось и двадцати лет. Юный Ломоносов избегал женитьбы, лишь сказавшись больным. Тогда же он твердо решил уехать в Москву. Задуманный побег он осуществил в декабре 1730 года.



Портрет М.В.Ломоносова неизвестного автора

По приезде в Москву Ломоносову удалось поступить в Московскую славяно-греко-латинскую академию. Жить и учиться в Москве было непросто. Впоследствии Ломоносов так писал об этом периоде жизни:

«Высочайшая щедрота несравненных монархини нашей, которую я вашим отеческим предстательством имею, может ли меня отвести от любления и от усердия к наукам, когда меня крайняя бедность, которую я для наук терпел добровольно, отвратить не умела... Обучаясь в Спасских школах, имел я со всех сторон отвращающие от наук пресильные стремления, которые в тогдашние лета почти непреодоленную силу имели. ...Несказанная бедность: имея один алтын в день жалования, нельзя было иметь на пропитание в день больше как на денежку хлеба и на денежку квасу. Таким образом жил я пять лет и наук не оставил».

И позднее, на всех этапах своей непростой жизни, Ломоносов проявлял удивительное упорство в достижении поставленных перед собой целей. С молодых лет Ломоносов сам был творцом своей судьбы: в 1734 году для совершенствования образования он переезжает в Киев, в Киево-Могилянскую академию, где, правда, проучился недолго. Уже в следующем году его, как одного из самых способных студентов, направляют на

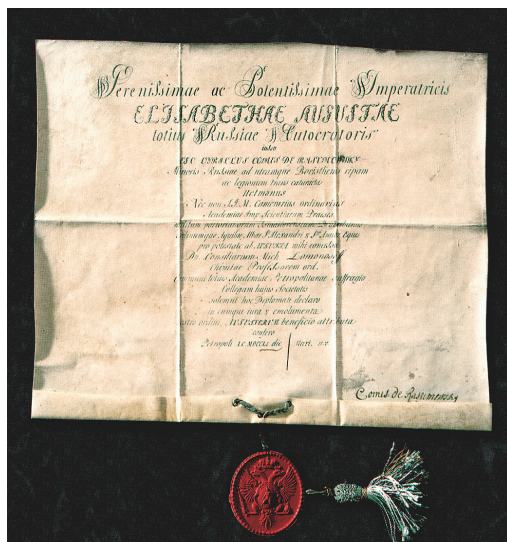
учебу в Петербург в университет при Академии наук. И здесь Ломоносова преследовала бытовая неустроенность и неопределенность положения: формально его не зачислили ни в академическую гимназию, ни в университет. Одним из препятствий было незнание немецкого языка, широко использовавшегося тогда в преподавании. Ломоносов начал изучать немецкий, и его усердие было замечено. Уже марте 1736 года, когда Академия наук принимает решение отправить 12 наиболее способных молодых людей, учеников «Спасских школ» (т.е. славяно-греко-латинских академий), для учебы в Европу, Ломоносов попадает в заветный список:

«1736 Марта 7 Императорская Академия Н. тогдашнему Имп. Кабинету докладом представила, что ежели несколько молодых людей послать во Фрайберг к горных дел физику Генкелю для обучения металлургии, то можно туда Густава Ульриха Райзера, Дмитрия Виноградова и Михайлу Ломоносова. На содержание их в каждый год потребно 1200 рублей, и потом на каждого по 400 рублей, а именно по 250 на кушанье, платье, книги и инструменты, да 150 на проезд в разные места и в награждение учителям проч. И хотя у них из сей суммы в Фрайберге по несколько рублей останутся, однакож достальные деньги пригодятся им на проезд их в Голландию, Англию и Францию, куда им необходимо ехать должно для смотра славнейших там лабораторий химических».

Таким образом, Ломоносов стал, пользуясь современной терминологией, студентом-целевиком. Он должен был получить образование в области химии металлургии, поскольку нарождавшаяся российская промышленность остро нуждалась в специалистах такого рода.

В ноябре 1736 года Ломоносов становится студентом Марбургского университета. Он изучает химию, механику, гидравлику, физику. Надо иметь в виду, что в те времена еще окончательно не сформировались границы между отдельными научными дисциплинами, поэтому полученное Ломоносовым в немецких университетах (после Марбурга последовал Фрайберг) образование было по сути своей синтетическим. Это важно для понимания того, почему на протяжении творческой части жизни ученый занимался столь широким кругом вопросов. Заметим также, что наряду с изучением наук в Германии Ломоносов брал уроки танцев и фехтования, много читал художественную литературу. Там же он начал формировать собственную библиотеку, тратя на приобретение книг значительную часть своего не очень большого денежного довольствия. В Россию Ломоносов вернулся в 1741 году.

По возвращении на родину Ломоносов начинает свою разнообразную деятельность в Академии наук. Его первым серьезным заданием становится составление каталога собраний минералов и окаменелостей Минерального кабинета Кунсткамеры. Он быстро справляется с этим заданием и начинает искать применение полученным знаниям и выход своей воистину неиссякаемой энергии. В частности, он просит разрешения начать чтение публичных лекций на русском языке. Он



Диплом профессора химии Ломоносова (1745 г.)

понимает, что широкому распространению знаний в России препятствует использование латыни и иностранных языков в научной литературе и преподавании. Вокруг этой проблемы у него возникает конфликт с некоторыми профессорами¹ Академии наук.

Ломоносов оказывается не только талантливым ученым, но и неплохим дипломатом. Он устанавливает полезные связи с любимцем императрицы Елизаветы И.И.Шуваловым и в 1749 году, в торжественном собрании Академии наук, произносит «Слово похвальное императрице Елизавете Петровне», привлекающее внимание двора. Благодаря связям и растущему авторитету Ломоносову удастся реализовать ряд важнейших проектов. В частности, в 1748 году Ломоносов организовал первую в России химическую лабораторию, а в 1753 году ему удалось устроить первую в России фабрику мозаики.

Важнейшим результатом организационной деятельности Ломоносова стало открытие в 1755 году Московского университета. Его принято считать первым полномасштабным университетом России, поскольку университет при Академии функционировал нерегулярно и его вряд ли можно назвать «кузницей» образованного сословия для всей страны. Московский же университет быстро превратился в истинный центр образования европейского уровня. При составлении плана создания университета Ломоносов использовал знания в области организации образования, приобретенные во время пребывания за границей.

Ломоносов много сил уделял тому, что в наши дни принято называть общественной деятельностью. Он никогда не забывал, с каким трудом ему самому удалось получить образование и пробиться в высшие слои российского общества. Поэтому он с такой на-

¹ В то время членов Академии наук называли ее профессорами. Звание «академик», присваивавшееся действительным членам Академии, появилось позже.



Мозаичный портрет Петра I, созданный М.В. Ломоносовым (хранится в Эрмитаже)

стойчивостью отстаивал права «низших сословий» на получение образования в гимназии и университете. При этом ему приходилось преодолевать сильнейшее сопротивление многих царедворцев и членов Академии наук.

Жизнь Ломоносова закончилась 4 апреля 1765 года. Об уважении, которое Ломоносов приобрел при жизни, говорит тот факт, что незадолго до смерти его навестила сама Императрица Екатерина II, «о чем подать благоволила новое Высочайшее уверение о истинном люблении и попечении своем о науках и художествах в отечестве», как писала в 1764 году газета «Санкт-Петербургские Ведомости». Об этом же уважении свидетельствует и место погребения Ломоносова: Александро-Невская лавра, где традиционно хоронили выдающихся представителей российской культуры.

Научные труды

Результаты научной деятельности Ломоносова трудно оценивать современными мерками. Надо учитывать то обстоятельство, что традиции проведения научных исследований во времена Ломоносова еще только формировались. Кроме того, как уже отмечалось, границы между научными дисциплинами еще не были достаточно четкими, поэтому Ломоносов занимался множеством конкретных проблем, относящихся к весьма далеким друг от друга областям естествознания. Приведем несколько примеров его исследовательской и изобретательской деятельности.

Интересный материал для понимания взглядов Ломоносова на науку дает его ранняя работа «Рассуждение о катоптрико-диоптрическом² зажигательном инструменте», представленная в Академию наук в августе 1741 года. Замечательно уже постановка задачи: Ломоносов намеревался «ввести в область химии приборы физиков, чтобы до известной степени устранить или облегчить трудности, встречающиеся в этой науке...» Конкретная задача, которую поставил перед собой Ломоносов, состояла в концентрации энергии солнечного излучения для получения высокой температуры, необходимой при проведении химических экспериментов. Вот как ученый описал проведенный им подготовительный эксперимент:

«И вот, наконец, явилась мысль, что солнечные лучи и после отражения от плоских зеркал все еще сохраняют теплотворную силу и, следовательно, по закону, которому они повинуются в других случаях, должны, будучи собраны выпуклой линзой, увеличить жар. Тотчас же я, торжествуя, взял плоское зеркало и линзу диаметром в два дюйма и, так как день был как раз ясный, собрал линзой солнечные лучи, отраженные зеркалом. Когда после этого я подставил кусок дерева, на нем образовалось черное пятно и оттуда пошел дым. Я смотрел на это с восторгом и, с целью идти далее, соединил фокус линзы, подставленной прямым лучам, с фокусом первой и поднес к ним весьма белую бумагу, которая отказывалась загораться от прямых солнечных лучей, собранных непосредственно той или другой из названных линз; сразу же пошел дым, на бумаге образовалось черное пятно, бумага вспыхнула, и огонь, разгораясь, начал ее сжигать».

На основе полученных результатов Ломоносов сконструировал инструмент (схема его показана на рисунке 1), в котором в одной точке концентрируется свет,

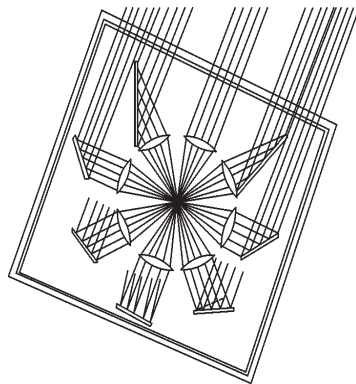


Рис.1. Принципиальная схема катоптрико-диоптрического зажигательного инструмента Ломоносова (1741 г.)

собранный восемью линзами. Ломоносовым была продумана система настройки прибора для его оптималь-

² Катоптрика описывает отражение света, диоптрика – его преломление. Таким образом, Ломоносов уже в самом названии работы говорит о том, что его прибор основан на комбинации явлений отражения и преломления света.

ного расположения относительно солнца. К сожалению, представленный молодым ученым проект не был поддержан академиками и прибор не был построен.

Заметим, что любого человека, знакомого с идеей так называемого лазерного термояда, не может не поразить сходство оптической схемы Ломоносова с теми схемами, которые пытаются реализовать современные физики.

Ломоносов внимательно следил за новыми результатами, которые получали естествоиспытатели того времени в разных областях науки. Так, прочитав о наблюдениях американца Бенджамина Франклина, касавшихся явлений атмосферного электричества, Ломоносов вместе со своим коллегой и другом академиком Георгом Вильгельмом Рихманом решил повторить и расширить наблюдения Франклина. Интерес к этим наблюдениям подогревался тем, что Рихман надеялся усовершенствовать свой электрометр, с помощью которого он измерял «электрическую силу». Как часто случалось в истории науки, исследователи не подозревали, что планируемые ими наблюдения таят смертельную опасность. Однажды во время наблюдений молния ударила в установку Рихмана-Ломоносова, и академик Рихман погиб.

Вот как сам Ломоносов описывал это трагическое событие:

«В роковой оный 26 день июля месяца, в первом часу пополудни, когда слаба очень казалась громовая сила, по слабым блистаниям и тихому грому и по отстоянию электрического облака, который зенита не совсем достигал, и вся сила десять градусов от севера к западу на вышине тридцати градусов казалась. Тогда сидел я при указателе воздушной электрической силы с материями разного рода, которыми выводил искры, наблюдал разный цвет оных. Внезапный сильный удар, господину Рихману смертоносный, умалив и вскоре отняв всю из прута силу, которая была около 15 градусов, пресек мои наблюдения. Электрическая стрела, при которой мною были чинены наблюдения, есть *ab* [рис.2]; около *a* привязаны многие иглы, *c* – место, где привязана отведенная проволока, покрытая шелком, в *d* чинены наблюдения».

Вид погибшего был страшен. Как писал Ломоносов графу Шувалову, «красно-вишнеевое пятно видно на лбу, а вышла из него громовая электрическая сила из ног в доски. Ноги и пальцы сини, башмак разорван, а не прожжен...» Помимо трагедии, связанной с гибелью друга, Ломоносов ожидали и другие неприятности, связанные с изучением атмосферного электричества. Его недоброжелатели попытались отменить заседание Академии, на котором Ломоносов намеревался прочитать доклад «Слово о явлениях воздушных, от электрической силы происходящих». Однако благодаря мужеству и настойчивости ученого заседание все же состоялось. Настойчивость Ломоносова объяснялась его опасениями, что мракобесы, воспользовавшись ситуацией, добьются запрета на дальнейшие исследования электрических явлений. В докладе Ломоносов изложил свои идеи относительно происхождения атмосферного электричества, которые, надо заметить, в

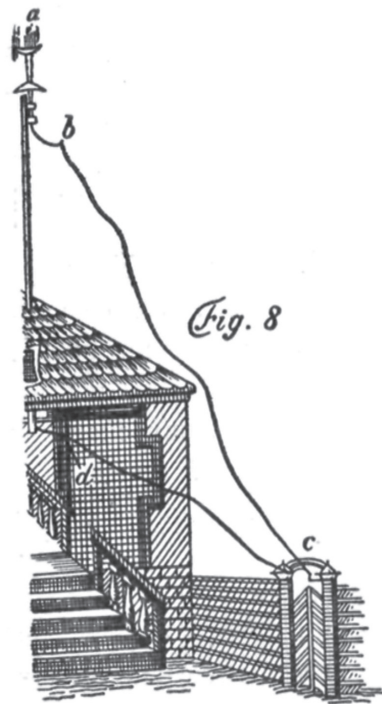


Рис.2. Незаземленная экспериментальная установка («громовая машина») для изучения грозových разрядов, которой пользовался Ломоносов в июне-июле 1753 года (рисунок Ломоносова)

основных чертах совпадают с современными представлениями об этом явлении. Так Ломоносов почтил память Рихмана, отдавшего жизнь ради прогресса науки.

Еще одна область науки, в которую Ломоносов внес заметный вклад, это теория теплоты. Он одним из первых ученых отстаивал представление о теплоте как роде движения, отказываясь от теории теплорода. В 1745 году, будучи еще адъюнктом Академии (т.е. до получения звания профессора), Ломоносов представил «диссертацию» «Размышления о причине теплоты и холода». Работа, в которой Ломоносов доказывал, что теплота обусловлена «коловратным» (вращательным) движением «нечувствительных частиц» (т.е. частиц, недоступных непосредственному ощущению), была принята академиками с осторожностью.³ Вот отрывок из протокола заседания:

«...похвально прилежание и желание г. адъюнкта заняться теорией теплоты и холода, но им [профессорам] кажется, что он слишком рано взялся за дело, которое, по-видимому, пока еще превышает его силы: прежде всего доказательства, с помощью которых он пытается частью установить, частью опровергнуть раз-

³ С современной точки зрения, предпочтение, которое Ломоносов отдал вращательному движению, выглядит довольно странным. Однако важна сама постановка вопроса: теплота – это род движения, а не особая материя.

личные внутренние движения тел, отнюдь недостаточны, с чем согласился и сам г. адъюнкт».

Замечание, надо сказать, странное. Научные идеи никогда сразу не рождаются в совершенной форме. Как показывает история науки, значительная часть открытий была сделана «с ошибками», которые были впоследствии исправлены. Однако если бояться этих ошибок, прогресс науки сильно замедлится. Правда, это хорошо понимают только те люди, которые сами занимаются серьезным научным творчеством. Не случайно отзывы великого математика Леонарда Эйлера, академика Петербургской Академии наук, написанный по запросу Президента Академии К.Г.Разумовского, звучит совершенно иначе:

«Все сии сочинения не токмо хороши, но и превосходны, ибо он [Ломоносов] объясняет физические и химические материи самые нужные и трудные, кои совсем неизвестны и невозможны были к истолкованию самым остроумным ученым людям, с таким основательством, что я совсем уверен в точности его доказательств. При сем случае я должен отдать справедливость г. Ломоносову, что он одарован самым счастливым остроумием для объяснения явлений физических и химических. Желать надобно, чтобы все прочие Академии были в состоянии показать такие откровения, которые показал г. Ломоносов».

Ломоносов активно занимался астрономией. Он самостоятельно конструировал астрономические приборы и проводил наблюдения. Заметим, что наблюдения звездного неба в XVIII веке было популярным занятием многих академиков, даже тех, чья специальность была весьма далека от астрономии. Ломоносов же, по собственному признанию, соединял астрономические исследования с физическими. Его высшим достижением стало открытие атмосферы у планеты Венеры.

Астрономы-теоретики рассчитали, что 26 мая 1761 года должно состояться «прохождение Венеры по диску Солнца». Этого события ждали все астрономы мира, поскольку планировавшиеся позиционные наблюдения⁴ в разных регионах земного шара, как ожидалось, позволяли уточнить расстояние от Земли до Солнца. В России организацией наблюдений занимался сам Ломоносов. Он же составил отчет «Явление Венеры на Солнце, наблюденное в Санктпетербургской Императорской Академии Наук мая 26 дня 1761 года». В этом отчете Ломоносов представляет проведенные наблюдения как коллективный труд, поэтому о своем вкладе в эту работу говорит в третьем лице. После описания результатов позиционных наблюдений Ломоносов пишет:

«Кроме строгих астрономических наблюдений, господин коллежский советник и профессор Ломоносов любопытствовал у себя больше для физических примечаний, употребив зрительную трубу о двух стеклах длиною в 4½ фута. К ней присовокуплено было весьма не густо копченное стекло, ибо он намерился

только примечать начало и конец явления и на то употребить всю силу глаза, а в прочее время прохождения дать ему отдохновение.

Ожидая вступления Венерины на Солнце около сорока минут после предписанного в эфемеридах времени, увидел наконец, что солнечный край чаемого вступления стал неясен и несколько будто ступешван, а прежде был весьма чист и везде равен; однако, не усмотрев никакой черноты и думая, что усталый глаз его тому помрачению причиною, отстал от трубы. Рослее немногих секунд, взглянувши в нее, увидел на том месте, где край Солнца показался прежде неясен, действительно черную щербину или отрезок весьма невеликий, но чувствительный вступающая Венеры. После с прилежанием смотрел вступления другого Венерины заднего края, который, как казалось, еще не дошел, и оставался маленький отрезок за Солнцем; однако вдруг показалось между вступающим Венериным задним и между солнечным краем разделяющее их тонкое, как волос, сияние, так что от первого до другого времени не было больше одной секунды.

... По сим примечаниям господин советник Ломоносов рассуждает, что планета Венера окружена знатною воздушною атмосферою, таковою (лишь бы не большею), какова обливается около нашего шара земного».

Это открытие – поистине мирового уровня. Обратите внимание на тонкость наблюдения и точность выражений, к которым стремится Ломоносов. Конечно, гипотеза о том, что атмосфера Венеры «воздушная», строго говоря, неточна, но в то время состав воздуха еще не был известен: лишь в 80-е годы XVIII века Генри Кавендишу удалось провести наиболее точный на тот период анализ состава воздуха и выделить кислород и азот.

По широте своих научных интересов Ломоносов не имел равных не только в Петербургской Академии наук, но и, по-видимому, среди современников в мире. В этом отношении он близок к Леонардо да Винчи. Как и великий итальянец, Ломоносов занимался усовершенствованием приборов для различного рода измерений (рис.3), а также конструированием принципиаль-

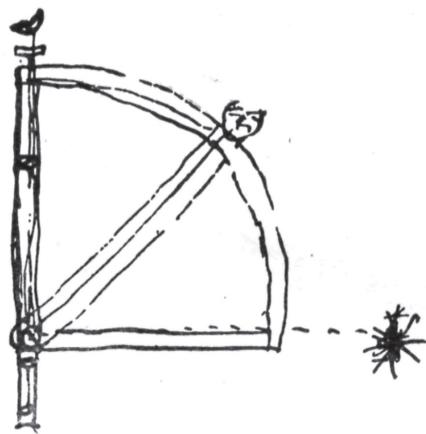


Рис.3. Собственноручный эскиз Ломоносова усовершенствованного им морского квадранта Гадлея (из «Химических и оптических записок»)

⁴ Позиционными в астрономии называются наблюдения, при которых как можно точнее фиксируются координаты астрономических объектов.

но новых устройств. Символично, что Ломоносову, как и Леонардо, принадлежит идея вертолета. Эскизы обеих конструкций представлены на рисунках 4 и 5.

Идея построения прообраза вертолета описана в протоколах Академии. Запись от 4 февраля 1754 года гласит:

«Почтеннейший Ломоносов предложил Конференции построить небольшой прибор, способный поднимать вверх термометры и другие малые инструменты

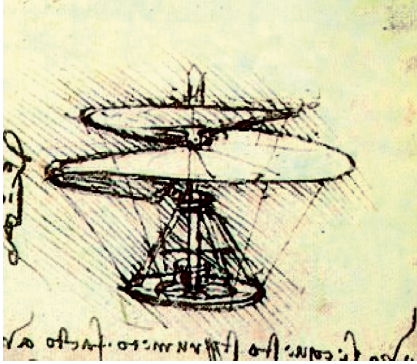


Рис.4. Чертеж так называемого «вертолета» Леонардо да Винчи (между 1483 и 1486 г.)

метеорологические, и предложил его чертеж. Славнейшие академики признали, что этот прибор заслуживает того, чтобы его построили и производили с ним опыты.

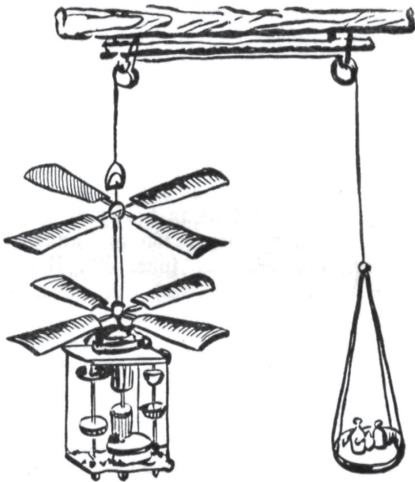


Рис.5. Прообраз вертолета — модель «аэродинамической машины» Ломоносова (1754 г.)

Поэтому постановили просить Академическую канцелярию донесением, чтобы она дала распоряжение часовому мастеру Фрициусу построить названный прибор под руководством почтеннейшего автора».

«Аэродинамическая машина» Ломоносова работала следующим образом. В специально изготовленном корпусе находился пружинный двигатель, «какие обычно

бывают в часах». Пружина заводилась ключом. При освобождении через систему шестеренок она приводила во вращение два винта, насаженных на одну ось на некотором расстоянии друг от друга. До освобождения пружины это устройство с помощью двух блоков уравнивалось чашей с гирьками, подвешенной с противоположной стороны. «Когда заводили пружину, — говорится в протоколе испытаний устройства, — машина сразу поднималась вверх. Таким образом, она обещала достижение ожидаемого действия».

После успешно проведенной демонстрации Ломоносов сообщил, что имеет намерение усовершенствовать прибор для увеличения его подъемной силы. Однако сведения о достигнутых успехах в этом направлении до наших дней не дошли.

Описанные результаты — лишь небольшая часть исследований, проведенных Ломоносовым, и его изобретений. Он также много занимался физической химией, метеорологией, металлургией, геологией, был инициатором многих географических исследований.

Литературно-художественная деятельность

При гигантских объеме и широте естественно-научных изысканий Ломоносова не могут не поражать результаты его деятельности на ниве словесности. Он был истинным реформатором литературного русского языка. В 1739 году он написал «Письмо о правилах российского стихотворства», в котором формулировал принципы нового стихосложения на русском языке и подчеркивал, что в оригинальном русском стихосложении необходимо использовать особенности русского языка. Его идеи породили плодотворные дискуссии, результаты которых во многом определили развитие литературного русского языка во второй половине XVIII—начале XIX века. И хотя А.С.Пушкин не одобрял собственно поэтическое творчество Ломоносова, он признавал его вклад в российское просвещение. Широко известно такое суждение Пушкина о Ломоносове:

«Уважаю в Ломоносове великого человека, но, конечно, не великого поэта... между Петром I и Екатериною II он один является самобытным сподвижником просвещения. Он создал первый университет; он, лучше сказать, сам был первым нашим университетом».

Ломоносов пробовал себя в разных поэтических жанрах — от парадных од до сатиры и лирики. Некоторые сюжеты он заимствовал из античной и зарубежной литературы, дополняя их своими мыслями и переживаниями. Примером такой комбинации является чудное стихотворение «Стихи, написанные на дороге в Петергоф, когда я в 1761 году ехал просить о подписании привилегии для Академии, быв много раз прежде за тем же»:

Кузнечик дорогой, коль много ты блажен,
Коль больше пред людьми ты счастьем одарен!
Препровождаешь жизнь меж мягкою травкою
И наслаждаешься медвяною росой.
Хотя у многих ты в глазах презренна тварь,
Но в самой истине ты перед нами царь;
Ты ангел во плоти, иль, лучше, ты бесплотен!

Ты скачешь и поешь, свободен, беззаботен,
Что видишь, все твое; везде в своем дому,
Не просишь ни о чем, не должен никому.

В последних, оригинальных, строках этого стихотворения чувствуется усталость Ломоносова от необходимости многократно обращаться к власти имущим, буквально вымаливая решения, значимые для развития науки и образования.

Ломоносов глубоко любил русский язык и дал ему следующую характеристику:

«Карл Пятый, римский император, говаривал, что испанским языком с богом, французским с друзьями, немецким с неприятелем, итальянским с женским полом говорить прилично. Но если бы он российскому языку был искусен, то конечно к тому присовокупил бы, что им со всеми оными говорить пристойно, ибо нашел бы в нем великолепие испанского, живость французского, крепость немецкого, нежность итальянского, сверх того богатство и сильную в изображениях краткость греческого и латинского языка».

Любовь Ломоносова к языку материализовалась в подготовке научной грамматики русского языка, выдержавшей 14 изданий. Впоследствии идеи Ломоносова легли в основу курса грамматики, который подготовил в 1771 году А.А.Барсов.

Личность и оценки

Даже из «мозаичного» обзора деятельности Ломоносова видно, что он представлял собой весьма незаурядную личность. Как у всякого неординарного человека, у него было много врагов и завистников, которых сам Ломоносов не только не боялся, но вселял в них страх, поскольку в случае прямых конфликтов зачастую не стеснялся применять свою недюжинную физическую силу. Об этой силе можно судить по такому эпизоду, получившему известность среди современников ученого. Однажды Ломоносов шел по недавно проложенному Большому проспекту Васильевского острова. Внезапно из кустов выскочили три матроса и попытались его ограбить. Исполненный возмущения от такой наглости, ученый одному из нападавших сломал нос, второго обратил в бегство, а третьего схватил и заставил раздеться. Одежду нападавшего он принес домой в качестве трофея.

Не боялся Ломоносов и намеков на свое «низкое» происхождение и материальные затруднения. Рассказывают, что однажды на камзоле Ломоносова продались локти. Повстречавший его придворный шеголь ехидно заметил по этому поводу:

– Ученость выглядывает оттуда...

– Нисколько, сударь, — немедленно ответил Ломоносов, — глупость заглядывает туда!

Нельзя не отметить, что Ломоносов был хорошим, верным товарищем. После трагической смерти Г.Рихмана Ломоносов потратил немало сил, чтобы добиться от властей пенсии для семьи погибшего ученого.

Заслуги Ломоносова в развитии просвещения ценили не только в России. Ученый был избран почетным членом Стокгольмской и Болонской академий наук.



Скульптурный портрет М.В.Ломоносова, выполненный по памяти в 1792 году его земляком Ф.И.Шубиным, сделавшим в искусстве почти столь же впечатляющую карьеру, как Ломоносов — в науке. Этот портрет, по мнению современников, наиболее точно воспроизводит образ ученого

К сожалению, в конце 1940-х — начале 1950-х годов в ходе кампании «борьбы с космополитизмом» заслуги российских ученых стали преувеличивать, пытаясь доказать, что большинство выдающихся открытий в науке было сделано или предвосхищено нашими соотечественниками. Это привело к искажению реальных заслуг российских ученых. Не обошла эта кампания и Ломоносова. В частности, Ломоносову приписывается открытие «всеобщего закона сохранения», который он якобы сформулировал в письме к великому математику Леонарду Эйлеру. В этом письме Ломоносов писал:

«Но все встречающиеся в природе изменения происходят так, что если к чему-либо нечто прибавилось, то это отнимается у чего-то другого. Так, сколько материи прибавляется какому-либо телу, столько же теряется у другого, сколько часов я затрачиваю на сон, столько же отнимаю от бодрствования и т.д. Так как это всеобщий закон природы, то он распространяется и на правила движения: тело, которое своим толчком возбуждает другое к движению, столько же теряет от своего движения, сколько сообщает другому, им движному».

В приведенном отрывке «закон сохранения» представлен скорее в виде заключения, основанного на здравом смысле (отсюда идея о сне и бодрствовании), чем в форме закона, базирующегося на данных эксперимента или выведенного на основе более общих постулатов. Поэтому, несмотря на то что письмо Ломоносова, написанное по-латыни, и было опубликовано, его идеи не оказали влияния на современников. Представляется, что жизнь Михаила Васильевича Ломоносова настолько богата истинными достижениями, что нет нужды приписывать ему «лишние», неочевидные заслуги.

Язык симметрии

Д. МАМФОРД, Д. РАЙТ, К. СИРИС

Группы, или Как без особого труда изготовить мозаику

Мы будем иметь дело с рисунками замощений и симметрий, поэтому нам нужна удобная система для перечисления (а потом и вычисления) всех преобразований, необходимых для того, чтобы замостить плоскость копиями исходной плитки.

Пусть вы хотите нарисовать, а еще лучше написать программу, которая рисует замощение, изображенное на рисунке 1. Обратите внимание, что в углу каждой плитки мы нарисовали красную звездочку. Исходные шестиугольные плитки обладали вращательной симметрией шестого порядка и, кроме того, множеством различных зеркальных симметрий. Однако плитки со звездочкой вообще не имеют симметрий. (Заметьте, что луч красной звездочки не совсем точно указывает на ближайший угол шестиугольника. В противном случае плитка имела бы зеркальную симметрию.) Это немного упрощает нашу задачу, потому что теперь достаточно определить лишь место на полу, куда следует положить плитку, а правильное размещение плитки на выбранной позиции уже единственно. Для начала выложим тщательно подготовленную первую плитку и обозначим ее F (на рисунке она находится в центре). Мы хотим систематически копировать эту плитку, пользуясь симметриями плоскости.

Сначала займемся горизонтальным рядом плиток, содержащим нашу первую плитку F . Этот ряд, разумеется, обладает трансляционной симметрией, и нам нужно лишь немного геометрии, чтобы найти расстояние между центрами соседних плиток в этом ряду. Будем считать, что при выбранном масштабе рисунка расстояние от центра шестиугольника до его стороны равно 1, т.е. расстояние между центрами двух соседних шестиугольников равно 2. Обозначим через T сдвиг на 2 единицы вправо. Плитки, лежащие правее F в том же ряду, — это просто сдвиги

$$T(F), T^2(F), T^3(F), \dots;$$

для краткости мы используем экспоненциальную запись и пишем, например, $T^3(F)$ вместо $T(T(T(F)))$. Чтобы перемещаться влево от исходной плитки, нужно применять обратное преобразование T^{-1} , которое сдвигает все на 2 единицы влево. Таким образом, плитки, лежащие слева от F , записываются в виде

$$T^{-1}(F), T^{-2}(F), T^{-3}(F), \dots$$

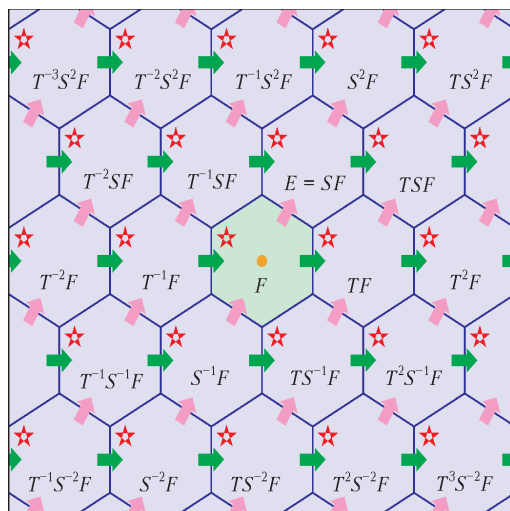


Рис.1. Украшенное звездочками шестиугольное замощение; каждая плитка помечена соответствующим преобразованием. Множество всех красных звездочек образует орбиту исходной красной звездочки (нарисованной на первой плитке F) под действием группы, порожденной преобразованиями S и T

На рисунке 1 каждая плитка снабжена соответствующей меткой.

Пусть теперь мы хотим выложить плитки следующего ряда сверху. Мы выбрали одну из плиток в этом ряду и обозначили ее E . Эту плитку можно получить сдвигом исходной плитки F , на сей раз по диагонали. Поскольку центры плиток находятся на расстоянии 2 друг от друга, можно показать, что этот сдвиг задается формулой

$$S(x, y) = (x + 1, y + \sqrt{3}).$$

С преобразованием S пришлось немного повозиться, но зато теперь мы можем добраться до всех остальных плиток, лежащих в том же ряду, что и E , при помощи сдвига T . Перечислим их справа налево:

$$\dots, T^{-2}(E), T^{-1}(E), E, T(E), \dots$$

На рисунке 1 они имеют метки вида $T^{-2}S(F)$ или $TS(F)$.

Кажется, система заработала. Чтобы получить третий ряд плиток, надо лишь еще раз повторить то, что мы уже сделали. Применим сдвиг S к E и ко всем степеням T ; получится третий ряд с плитками вида

$T^{-2}S^2(F)$ или $T^{-1}S^2(F)$. Чтобы получить ряд плиток, расположенный под F , следует применить обратное преобразование S^{-1} . Этот ряд содержит плитки вида $T^{-2}S^{-1}(F)$ или $T^{-1}S^{-1}(F)$, и так далее. Итак, чтобы выложить полностью все плитки, *достаточно использовать только два преобразования S и T , а также их обратные S^{-1} и T^{-1}* . Пользуясь нашей экспоненциальной записью, мы можем сказать, что до любой плитки массива можно добраться при помощи композиций вида $T^l S^k$, где k и l – произвольные целые числа, положительные, отрицательные или равные нулю.¹

Этот процесс построения симметрий работал так гладко, потому что, как мы видели, если S и T являются симметриями одной и той же фигуры, то их композиция ST и обратные им S^{-1} и T^{-1} также являются ее симметриями. В XIX веке подобные семейства преобразований обнаруживались так часто, что в конце концов математики решили дать им специальное название. На формальном математическом языке **группой** преобразований называется семейство, обладающее следующими двумя свойствами:

1) если S и T принадлежат семейству, то ST тоже ему принадлежит;

2) если S принадлежит семейству, то S^{-1} тоже ему принадлежит.

Обычно такое семейство, или группу преобразований, обозначают одной буквой, чаще всего – буквой G . Семейство симметрий, изображенных на рисунке 1, – хороший пример группы: скомбинируйте любые две симметрии, и вы получите третью. Мы видели, что каждая симметрия из этого семейства представляется в виде композиции базовых преобразований S , T и их обратных; в таких случаях говорят, что преобразования S и T **порождают** группу G , или являются ее **образующими**. Симметрии, с которыми мы работаем, по мере нашего продвижения вперед будут становиться все сложнее, но общая идеология не изменится. Мы начинаем с небольшого числа порождающих преобразований, а затем рассматриваем их композиции точно так же, как в этом простом примере.

Еще один пример группы связан с нашим рисунком штата Айова и его одинаковыми квадратными полями (см. рисунок 1 в первой части статьи). На этот раз базовые симметрии – это сдвиг E всей картинki на одну милю к востоку и сдвиг N всей картинki на одну милю к северу. Легко видеть, что любую другую симметрию

Эварист Галуа (1811–1832). Истоки теории групп

Идея группы принадлежит Эваристу Галуа, который, как и мы, занимался изучением симметрий, но симметрий совсем иного вида. Галуа интересовали симметрии, которыми обладают корни полиномиальных уравнений. Кроме всего прочего, открытия Галуа *доказали невозможность* решения задач, занимавших лучшие математические умы в течение двух тысячелетий: при помощи только циркуля и линейки невозможно ни осуществить трисекцию угла, ни «удвоить» единичный куб (построить отрезок длиной $2^{1/3}$).

Галуа развивал свои идеи совершенно самостоятельно начиная со старших классов гимназии, но его жизнь, омраченная политическими интригами и самоубийством отца, внезапно и трагически оборвалась на дуэли в возрасте всего 20 лет. Рукописи Галуа были утеряны или же не поняты и пролежали без дела более двадцати лет. Первым, кто осознал их важность, был Лиувиль, который и организовал их публикацию в 1846 году. С этого момента идея группы постепенно набирала силу; в 1850-е годы ее подхватил Коши, а затем и Кэли.

Разбирая бумаги Коши вскоре после его смерти в 1857 году, Камиль Жордан обнаружил письмо, в спешке написанное Галуа в ночь перед роковой дуэлью, в котором он приводил набросок дальнейшей теории и выражал надежду, что «кто-нибудь сочтет полезным разобраться в этих беспорядочных записях». Хотя письмо к тому времени было опубликовано, оно не было широко известно. Потрясенный, Жордан приступил к систематическому изучению работ Галуа. Кульминацией этого труда явился выход в свет в 1870 году знаменитой книги Жордана «Трактат о подстановках и алгебраических уравнениях». Эта книга, которая стала важным событием в математике, содержала первое систематическое развитие революционных идей Галуа, а также полное изложение теории групп.

В том же году два молодых человека, только недавно получивших свои докторские степени, предприняли путешествие в Париж, чтобы поработать вместе с Жорданом. Их звали Феликс Клейн и Софус Ли. Каждый из них имел свой собственный взгляд на то, как объединить теорию групп с геометрией и анализом, но оба оказали глубочайшее воздействие на все дальнейшее развитие математики.



данного рисунка можно представить в виде композиции преобразований E , N и их обратных $W = E^{-1}$ и $S = N^{-1}$. Множество всех точек, до которых можно добраться из данной точки (например, «базового» красного дома в центре), применяя всевозможные композиции преобразований E , N , E^{-1} и N^{-1} , называется **орбитой** дома под действием группы. Нарисовать орбиту – это прекрасный способ «увидеть» группу геометрически.

Группа симметрий в этом примере порождена преобразованиями E и N . Каждому дому соответствует ровно одна симметрия – та, с помощью которой можно добраться до него из «начального» дома. Квадратные фермы можно пометить теми же симметриями. Поскольку они примыкают друг к другу без наложений и покрывают всю плоскость, говорят, что они образуют **мозаику**, или **замощение** плоскости.

Формальный язык, с помощью которого вводится понятие группы, с непривычки кажется довольно абстрактным и туманным. На самом деле идея группы присутствовала и работала в математике много лет, прежде чем выкристаллизовалась эта краткая форму-

¹ Как обычно, используя экспоненциальную запись, мы полагаем, что T^0 есть тождественное преобразование I .

лировка. Мощь понятия группы в том, что оно выражает все несметное количество способов, которыми можно комбинировать симметрии, при помощи двух простых правил.

Алгебра симметрий

В предыдущем разделе мы выяснили, что преобразование, обратное к T , – это не что иное, как правило, которое ликвидирует эффект, произведенный преобразованием T : если T переводит точку P в точку Q , то T^{-1} переводит Q обратно в P . Этот факт удобно записывать в терминах композиции равенством $T^{-1}T(P) = P$. Таким образом, в наших рассуждениях возникает специальное преобразование – **тождественное преобразование** I . Это преобразование оставляет вообще все точки неподвижными, т.е. $I(P) = P$ для любой точки P . Может показаться, что изучать такое преобразование довольно глупо, но рассматривать его необходимо для полноты; так, было очень трудно заниматься арифметикой до чудесного изобретения числа 0. Равенство $T^{-1}T(P) = P$ можно записать также в виде

$$T^{-1}T = I.$$

Отсюда автоматически следует, что $TT^{-1} = I$. Чтобы убедиться в этом, возьмем произвольную точку x . Под действием T в нее перешла какая-то точка, так что положим $x = T(y)$. Тогда

$$T^{-1}(x) = T^{-1}T(y) = I(y) = y,$$

откуда следует, что

$$TT^{-1}(x) = T(y) = x = I(x).$$

При композиции с чем бы то ни было тождественное преобразование, как и его родственник число 0 при сложении, не оказывает никакого дополнительного эффекта, т.е.

$$TI = IT = T.$$

Эта формула не менее полезна и не более увлекательна, чем равенство $0 + 3 = 3 + 0 = 3!$

Вспомним, что преобразование T называется симметрией, если оно сохраняет узор из плиток. Если T переводит плитку U в плитку V , то T^{-1} без сомнений переводит плитку V в плитку U . Иными словами, если T – симметрия, то обратное преобразование T^{-1} также является симметрией. Еще более очевидно, что симметрией является тождественное преобразование I : поэтому, в частности, мы и настаивали на том, что симметрия может оставлять плитки неподвижными!

А вот небольшая загадка. Пусть T – преобразование; какое преобразование будет обратным к обратному преобразованию T^{-1} ? Если вы рассмотрите несколько простых примеров и чуть-чуть подумаете, то увидите, что это не что иное, как исходное преобразование T . Например, если T – сдвиг «на 3 дюйма влево», то T^{-1} – сдвиг «на 3 дюйма вправо». Чтобы нейтрализовать эффект от перемещения на 3 дюйма вправо, очевидно, нужно переместиться обратно на 3 дюйма влево. Иными словами, T является обратным к обратному преобразованию T^{-1} . Этот факт можно записать в виде

Примечание 1. Расстановка скобок в композициях

Как только мы договорились о том, в каком порядке применять отображения в композиции, их можно заключать в скобки произвольным образом. Соответствующее правило называется **ассоциативным законом**. Оно утверждает, что

$$(ST)U = S(TU).$$

Это означает, что, применив сначала отображение U , а затем композицию ST , мы получим в точности тот же результат, который получили бы, применив сначала TU , а затем S . Вот более сложный пример:

$$(ST)(UV) = S(TU)V.$$

Обычный язык не всегда обладает ассоциативностью. Например,

((Казнить нельзя) помиловать)

– не то же самое, что

(Казнить (нельзя помиловать)).

тождества $(T^{-1})^{-1} = T$, не более удивительного, чем равенство $-(-2) = 2$.

В качестве еще одного примера выясним, какое преобразование является обратным к композиции ST . Если вы применили сначала T , а потом S , то для ликвидации полученного эффекта надо сначала ликвидировать эффект от S , а затем – от T . Иными словами, следует ожидать, что преобразование, обратное к ST , есть $T^{-1}S^{-1}$. Проверим эту гипотезу с помощью выкладки:

$$(T^{-1}S^{-1})ST = T^{-1}(S^{-1}S)T = T^{-1}IT = T^{-1}T = I.$$

Полученные важные формулы мы собрали в рамке внизу этой страницы.

Как сделать шину из плитки

Вполне возможно, что читатель уже встречался с математическим термином **топология**. Топологию часто называют «геометрией листа резины», а ее описания

Группы, композиции и обратные

Группа преобразований – это семейство, обладающее следующими двумя свойствами:

- 1) если S и T принадлежат семейству, то ST тоже ему принадлежит;
- 2) если S принадлежит семейству, то S^{-1} тоже ему принадлежит.

Правило, описывающее действие композиции ST , таково:

сначала применить T , а затем S .

Чтобы обратить композицию ST , следует обратить каждое преобразование в отдельности и поменять их порядок:

сначала применить S^{-1} , а затем T^{-1} .

В символической записи:

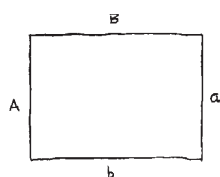
$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}.$$

Обратное к обратному есть исходное преобразование:

$$(T^{-1})^{-1} = T.$$

часто начинаются с рисунков, показывающих, как изготовить «бублик», или поверхность типа шины (точнее – велосипедной камеры). Любая поверхность такой формы, даже скрученная и изогнутая (но не порванная!), называется **тором**. Изготовление тора мы изобразили на рисунке 2; вы видите, как доктор Стрелкин (попав в трехмерное пространство, он набрал немного веса) мастерит гигантскую шину.

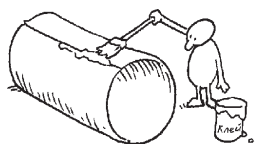
Описанную процедуру склейки можно понимать более хитрым образом. Объясним его на примере бесконечной равнины штата Айова с ее абсолютно одинаковыми фермами (см. рис.1 из первой части статьи). Представьте, что, следуя процедуре доктора Стрелкина, мы вырезали одно поле по границе и склеили его четыре стороны попарно так, что получилась торообразная космическая станция, на которой имеется всего одна ферма. Если, находясь на этой станции, вы



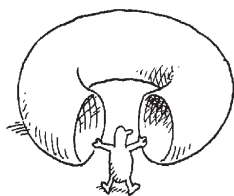
Начнем с прямоугольника; сторону a будем склеивать с A , a b – с B .



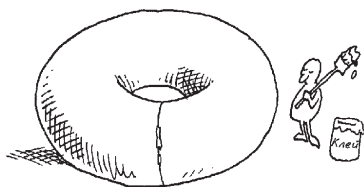
Сверните лист, чтобы свести A и a .



Склейте стороны a и A ; получится цилиндр.



Изогните цилиндр так, чтобы совместились стороны B и b .



Склейте стороны B и b ; получится поверхность бублика, или тора.

Рис.2. Доктор Стрелкин мастерит огромную шину из квадратного куска резины. Первый фрагмент: большой лист резины, с которого доктор начинает работу. На втором и третьем фрагменте доктор сворачивает лист в цилиндр и склеивает его правую и левую стороны. На четвертом фрагменте он аккуратно изгибает цилиндр так, чтобы совместить его концы, а на пятом вы видите окончательный результат – огромную шину. Обратите внимание, что стороны исходного листа резины мы поместили буквами a, b, A, B в таком образом, что сторона a противоположна стороне A , а сторона b противоположна стороне B , т.е. a склеивается с A , а b склеивается с B .

отправитесь «на север» по коричневой тропинке, идущей в направлении с севера на юг, то не попадете к дому соседа, а вернетесь к вашему собственному дому, причем «с юга». Если же вы пойдете «на восток» по зеленой тропинке, идущей в направлении с востока на запад, то вернетесь к собственному дому «с запада».

Вам может прийти в голову фантастическая мысль: а как понять, живете ли вы на космической станции, склеенной всего из одной фермы, или же на гладкой равнине Айовы, на которой все фермы абсолютно одинаковы? Подобные вопросы приводят в восторг философов: если все фермы на самом деле абсолютно одинаковы, то различить эти ситуации невозможно! Таким образом, конструкцию доктора Стрелкина можно понимать по-другому: вместо того чтобы вырезать одно поле и «склеивать» его стороны, можно взять на себя роль Господа Бога и объявить, что все фермы не просто выглядят одинаково, а *совпадают*, потому что на самом деле ферма только одна. Иначе говоря, можно условиться, что все точки одной орбиты группы, порожденной восточным сдвигом E и северным сдвигом N , «совпадают».

Путь лисы, рыскающей по полям Айовы от фермы к ферме, представляет собой извилистую кривую. После склейки мы можем наблюдать тот же путь на торе, но теперь, поскольку все фермы совпадают (или, если хотите, ферма всего одна), в тот момент, когда лиса перебегает границу между соседними фермами, ее путь на торе возвращается на ту же ферму, оказываясь в симметричной точке на противоположной стороне поля. Любой путь, который на равнине Айовы вел от одного фермерского дома к другому, теперь ведет от нашего единственного дома к нему же самому. Интересная задача – выяснить, сколько существует различных таких путей.

В рассказе великого аргентинского писателя Хорхе Луиса Борхеса «Вавилонская библиотека» замечательно описан трехмерный аналог такой бесконечно повторяющейся вселенной. Согласно Борхесу, «Вселенная – некоторые называют ее Библиотекой» – состоит из несметного числа одинаковых шестигранных галерей. Четыре из шести стен каждой галереи заняты пятью длинными полками, а оставшиеся две стены узкими коридорами соединены с другими галереями, идентичными первой и всем остальным. Винтовые лестницы уходят резко вниз и взмывают вверх к отдаленным областям. По словам Борхеса, «Библиотека – это шар, точный центр которого находится в одном из шестигранников, а поверхность – недосягаема». Хотя нам не удалось воспроизвести с математической точностью соединение этих шестигранных галерей, но созданный Борхесом образ бесконечного повторения во вселенной, состоящей из неотличимых комнат, захватывает и тревожит воображение.

Более сложные группы симметрий приводят не только к более сложным мозаикам, но и к более сложным поверхностям. Имея произвольный узор из плиток, инвариантный относительно движений из некоторой группы симметрий, мы можем попытаться использовать элементы группы как инструкции по склейке, а

именно взять начальную плитку и склеивать две ее стороны каждый раз, когда в группе найдется преобразование, переводящее точки одной стороны в точки другой. Склеивая стороны таким образом, мы получаем некоторую поверхность. Ее можно считать моделью вселенной, в которой мы, как доктор Стрелкин, не умеем различать симметричные точки. В упражнении 1 мы предлагаем вам исследовать, что получится, если попробовать склеить шестиугольные плитки, используя симметрии узора на полу ванной комнаты.

Сопряжения, или Как сохранить положение вещей, изменив точку зрения

Осталось рассмотреть последнее связующее звено между геометрией замощений и алгебраическим формализмом теории групп. Пусть у нас есть два рисунка, состоящих из одного и того же набора плиток, причем известно преобразование, связывающее эти рисунки. Иными словами, имеется отображение S , которое переводит набор плиток, замощающих один пол, в набор плиток, замощающих другой пол. Мы хотим связать симметрии плиток первого пола с симметриями плиток второго пола. На рисунке 3 слева вы видите замощение

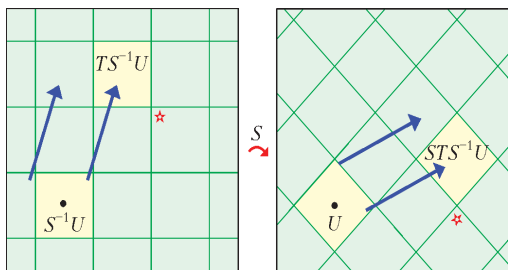


Рис.3. Два замощения квадратными плитками: слева стороны плиток идут по горизонтали и вертикали, а справа рисунок повернут на 45°

пола квадратными плитками, а справа – то же самое замощение на другом полу, повернутое на 45° относительно первого, так что стороны плиток идут не горизонтально, а по диагонали. Таким образом, в этом случае S есть поворот на 45° . Если мы знаем симметрии первого замощения, то должен найтись и способ определить симметрии второго, не повторяя все выкладки с самого начала.

Пусть T – симметрия левого замощения. Мы хотим найти преобразование, которое действует в точности как S , будучи примененным к правому рисунку. Обозначим новое отображение через $\hat{T}$. То, что мы делаем, можно понимать как смену точки зрения: преобразование S переносит все в новую систему координат. Это означает, что каждая точка P на левой картинке заменяется точкой $S(P)$ на правой. Чтобы выяснить, как новое отображение $\hat{T}$ действует на плитку U , сначала применим S^{-1} , чтобы перевести плитку обратно в систему координат левого рисунка, затем подействуем на нее исходным преобразованием T и наконец применим S , чтобы вернуться в систему координат

правого рисунка. Итак, мы последовательно применили преобразования S^{-1} , T и S и тем самым вывели формулу

$$\hat{T} = STS^{-1}.$$

Эту формулу, хотя она и выглядит сложновато, стоит хорошо продумать. Отображение $\hat{T}$ называется **сопряженным** с T . С геометрической точки зрения оно ведет себя так же, как T , с учетом того, что исходная система координат изменилась под действием так называемого **сопрягающего отображения** S .

На рисунке 3 преобразование T – это сдвиг в направлении $(1; 2)$, а преобразование S – поворот на 45° по часовой стрелке относительно начала координат $(0; 0)$. Из рисунка должно быть ясно, что сопряженное преобразование $\hat{T}$ также является сдвигом. Разница в том, что направление сдвига повернулось на 45° по часовой стрелке. В примечании 2 мы проверяем, согласуется ли этот результат с нашей формулой $\hat{T} = STS^{-1}$.

Сформулируем несколько общих принципов. Пусть S – произвольный сдвиг, поворот или отражение и $\hat{T} = STS^{-1}$. Тогда

- если T – произвольный сдвиг, переводящий начало координат 0 в точку P , то $\hat{T}$ – сдвиг, переводящий $S(0)$ в $S(P)$;
- если T – поворот относительно точки P , то $\hat{T}$ – поворот относительно точки $S(P)$ на тот же угол;
- если T – отражение относительно зеркала M , то $\hat{T}$ – отражение относительно зеркала $S(M)$.

Примечание 2. Проверка формулы для сопряженного преобразования

Чтобы убедиться в справедливости формулы $\hat{T} = STS^{-1}$ для примера на рисунке 3, сначала надо найти формулу для сопрягающего отображения S . К счастью, в рамке на странице 11 уже выписаны формулы для всех основных симметрий. Нам нужна формула для поворота на угол $\theta = 45^\circ$. Применяя теорему Пифагора к треугольнику с углами 90° , 45° и 45° , нетрудно убедиться, что $\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2} = \sin 45^\circ$. Таким образом, мы имеем следующие формулы:

$$T(x, y) = (x + 1, y + 2),$$

$$S(x, y) = ((x + y)/\sqrt{2}, (-x + y)/\sqrt{2}),$$

$$S^{-1}(x, y) = ((x - y)/\sqrt{2}, (x + y)/\sqrt{2}).$$

Теперь сделаем глубокий вдох и приступим к выкладкам:

$$\begin{aligned} \hat{T}(x, y) &= STS^{-1}(x, y) = \\ &= ST((x - y)/\sqrt{2}, (x + y)/\sqrt{2}) = \\ &= S((x - y)/\sqrt{2} + 1, (x + y)/\sqrt{2} + 2) = \\ &= (x + 3/\sqrt{2}, y + 1/\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Как мы и предсказывали, оказалось, что $\hat{T}$ – это сдвиг на вектор $(3/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$, который является образом исходного вектора сдвига $(1; 2)$ под действием сопрягающего преобразования S !

Примечание 3. Алгебра сопряжений

Еще одной иллюстрацией того, как работает сопряжение, является выкладка

$$\hat{T}^{-1} = (STS^{-1})^{-1} = (S^{-1})^{-1} T^{-1} S^{-1} = ST^{-1} S^{-1},$$

которая показывает, что преобразование, обратное к сопряженному с T , есть сопряженное с обратным к T . Можете проверить, что если T – отражение, то

$$\hat{T}^{-1} = ST^{-1} S^{-1} = STS^{-1} = \hat{T};$$

иными словами, $\hat{T}$ обладает тем же алгебраическим свойством, что и T .

Сопряжение сохраняет и композицию отображений. Словами это можно выразить так: преобразование, сопряженное к композиции, есть композиция сопряженных. Но, вероятно, в этот момент читатель согласится с нами, что гораздо проще использовать язык формул:

$$S(TU)S^{-1} = (STS^{-1})(SUS^{-1}).$$

Упражнения

1. Склеиваем шестиугольные плитки. Рассмотрим шестиугольное замощение, изображенное на рисунке 1. Вырежем один шестиугольник F и представим себе, что мы склеили три пары его параллельных сторон. Отображение T склеивает левое и правое ребра, S – правое верхнее и левое нижнее, а $T^{-1}S$ – левое верхнее и правое нижнее. Какая поверхность получится в результате? Может быть, вам удастся физически склеить ее из достаточно эластичного материала? Тогда набейте вашу новую диковинную игрушку каким-нибудь наполнителем, чтобы придать ей форму, сфотографируйте ее и пришлите нам фотографию!

2. Шестиугольные плитки. Мы упростили задачу о шестиугольных плитках на рисунке 1, пририсовав к ним красные звездочки, которые «нарушили симметрию» каждой плитки. Пусть теперь мы хотим выложить шестиугольный узор из обычных голубых плиток без звездочек. На сей раз узор обладает еще и вращательной симметрией, поэтому если

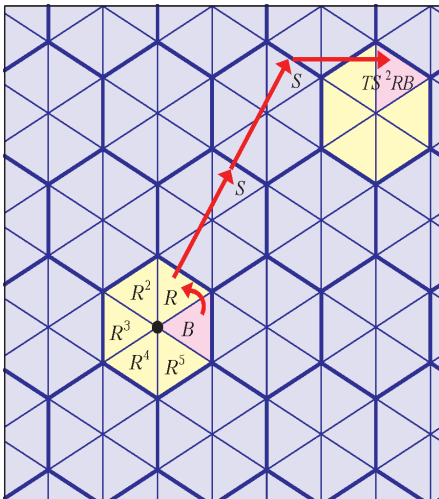


Рис. 4. Замощение плоскости шестиугольниками, разбитыми на равносторонние треугольники. Отображение TS^2R переводит розовый треугольник, обозначенный через B , в розовый треугольник вверх справа

мы будем помечать каждую плитку U симметрией, переводящей F в U , то в итоге U может получить несколько разных меток. Чтобы преодолеть эту трудность, можно разбить каждую плитку на шесть одинаковых треугольников, как показано на рисунке 4. Симметрия, соответствующая этому разбиению, есть поворот на 60° против часовой стрелки относительно центра плитки F . Мы обозначили один из шести треугольников через B , это будет наша новая базовая плитка, и пометили ее образы:

$$B, R(B), R^2(B), R^3(B), R^4(B), R^5(B).$$

Почему $R^6 = I$? Проверьте с помощью рисунка, что $R^{-1} = R^5$, $R^{-2} = R^4$ и т.д.

Убедитесь, что до любого другого треугольника, изображенного на рисунке, можно добраться с помощью композиций отображений R , S и T . Как получить верхний розовый треугольник? Поскольку симметрий, оставляющих неподвижным любой данный треугольник, не существует (кроме отражений, которые мы запретили, потому что они поворачивают шестиугольник неправильным образом), каждый треугольник помечен ровно одной симметрией – той, с помощью которой можно получить его из базовой плитки B . Такая плитка называется **фундаментальной областью** (или фундаментальной плиткой) для действия группы, порожденной преобразованиями S , T и R .

3. Замощение двенадцатиугольниками. Замощение, изображенное на рисунке 5, на самом деле обладает ровно теми

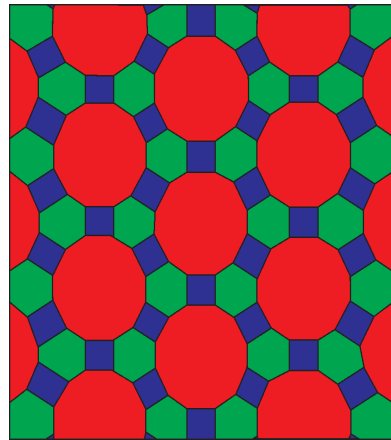


Рис. 5

же симметриями, что и замощение шестиугольниками на рисунке 4. Удастся ли вам выделить фундаментальную область? Сделав это, попытайтесь написать программу для замощения плоскости ее образами. Вам придется использовать один или более циклов, которые будут рисовать многочисленные копии этой фундаментальной области, составляя различные композиции симметрий.

Многие рисунки Эшера содержат необычные замощения, с которыми вы можете поэкспериментировать. Например, любопытно было бы найти фундаментальную область для широко известной красной гравюры 1941 года «Раковины и морские звезды».

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуются знания, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5-6/2011» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2236» или «Ф2243». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам math@kvantjournal.ru и phys@kvantjournal.ru соответственно.

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М2236–М2243 предлагались на заключительном этапе XXXVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задача М2245, а) предлагалась на LII Международной математической олимпиаде.

Задачи М2236–М2245, Ф2243–Ф2252

М2236. На доске написаны девять приведенных квадратных трехчленов: $x^2 + a_1x + b_1$, $x^2 + a_2x + b_2$, ..., $x^2 + a_9x + b_9$. Известно, что последовательности $a_1, a_2, \dots, a_9$ и $b_1, b_2, \dots, b_9$ – арифметические прогрессии. Оказалось, что сумма всех девяти трехчленов имеет хотя бы один корень. Какое наибольшее количество исходных трехчленов может не иметь корней?

И. Богданов

М2237. Для некоторых 2011 натуральных чисел выписали на доску все их $2011 \cdot 2010/2$ попарных сумм. Могло ли оказаться, что ровно треть выписанных сумм делится на 3, и еще ровно треть из них дают остаток 1 при делении на 3?

И. Богданов

М2238. Дан остроугольный треугольник ABC . На продолжениях его высот BB_1 и CC_1 за точки B_1 и C_1 выбраны соответственно точки P и Q такие, что угол PAQ – прямой. Пусть AF – высота треугольника APQ . Докажите, что угол BFC – прямой.

А. Полянский

М2239. На столе лежит куча из более чем n^2 камней. Петя и Вася по очереди берут камни из кучи, первым берет Петя. За один ход можно брать любое простое число камней, меньшее n , либо любое кратное n число камней, либо один камень. Докажите, что Петя может действовать так, чтобы взять последний камень независимо от действий Васи.

С. Берлов

М2240. Для натуральных чисел $a > b > 1$ определим последовательность $x_1, x_2, \dots$ формулой $x_n = \frac{a^n - 1}{b^n - 1}$.

Найдите наименьшее d такое, что эта последовательность не содержит d последовательных членов, являющихся простыми числами, ни при каких a и b .

В. Сендеров

М2241*. Дан неравносторонний треугольник ABC . Пусть N – середина дуги BAC его описанной окружности, а M – середина стороны BC . Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1 , I_2 , A , N лежат на одной окружности.

М. Кунгожин

М2242*. Клетчатый квадрат 2010×2010 разрезан на трехклеточные уголки. Докажите, что можно в каждом уголке отметить по клетке так, чтобы в каждой вертикали и в каждой горизонтали было поровну отмеченных клеток.

И. Богданов, О. Подлипский

М2243*. По шоссе в одном направлении едут 10 автомобилей. Шоссе проходит через несколько населенных пунктов. Каждый из автомобилей едет с некоторой постоянной скоростью в населенных пунктах и с некоторой другой постоянной скоростью вне населенных пунктов. Для разных автомобилей эти скорости могут отличаться. Вдоль шоссе расположено 2011 флажков. Известно, что каждый автомобиль проехал мимо каждого флажка, причем около флажков обгонов не происходило. Докажите, что мимо каких-то двух флажков автомобили проехали в одном и том же порядке.

С. Берлов

М2244*. Пусть даны точки A_1, A_2, B_1, B_2 и C_1, C_2 , лежащие на одной окружности, а также некоторая окружность ω . Через точки A_1 и A_2 проведем две

окружности, касающиеся ω , обозначим их точки касания с ω через A_3 и A_4 . Точки B_3 , B_4 и C_3 , C_4 определяются аналогично. Докажите, что прямые A_3A_4 , B_3B_4 и C_3C_4 пересекаются в одной точке.

А.Акопян, С.Ильясов

M2245*. Пусть $\mathcal{S}$ – конечное множество точек на плоскости, содержащее хотя бы две точки. Известно, что никакие три точки множества $\mathcal{S}$ не лежат на одной прямой. Назовем *мельницей* следующий процесс. Вначале выбирается прямая l , на которой лежит ровно одна точка $P \in \mathcal{S}$. Прямая l вращается по часовой стрелке вокруг центра P до тех пор, пока она впервые не пройдет через другую точку множества $\mathcal{S}$. В этот момент эта точка, обозначим ее Q , становится новым центром, и прямая продолжает вращаться по часовой стрелке вокруг точки Q до тех пор, пока она снова не пройдет через точку множества $\mathcal{S}$. Этот процесс продолжается бесконечно.

а) Докажите, что можно выбрать некоторую точку P множества $\mathcal{S}$ и некоторую прямую l , проходящую через P , так, что для мельницы, начинающейся с прямой l , каждая точка множества $\mathcal{S}$ выступит в роли центра бесконечное число раз.

б) Докажите, что можно выбрать некоторую точку P множества $\mathcal{S}$ такую, что для мельницы, начинающейся с любой прямой l , проходящей через P , каждая точка множества $\mathcal{S}$ выступит в роли центра бесконечное число раз.

Дж.Смит (Великобритания)

Ф2243. Длинная прямая лестница состоит из ступенек с горизонтальными поверхностями, каждая из которых имеет ширину $L = 29$ см и высоту $h = 15$ см. Маленькому мячу радиусом $R = 1$ см придали такую начальную горизонтальную скорость v и такую угловую скорость вращения ω , что он стал спускаться по ступенькам, «пересчитывая» их одну за одной, ударяясь о каждую ступеньку на одном и том же расстоянии от края ступеньки, причем над каждой ступенькой после удара он поднимался на одну и ту же высоту. Отношение высоты, на которую поднялся мяч над первой ступенькой после удара о нее, к высоте, с которой его бросили, равно $0,7$. Коэффициент трения мяча о поверхность ступенек не равен нулю, но скорость вращения мяча при ударах не меняется, так как мгновенная скорость движения нижней точки мяча имеет все время нулевую горизонтальную составляющую. Какими были начальные скорости мяча v и ω и на какой высоте H над ступенькой, о которую он в первый раз ударился, находился мяч при старте?

С.Полтинников

Ф2244. На легкой короткой нити к ветке сосны подвешена гири́ка массой $m = 1$ кг. К ней привязана еще одна легкая нить с длиной в недеформированном состоянии $l = 1$ м и жесткостью $k = 1$ кН/м, на конце которой висит еще одна гири́ка массой $m = 1$ кг. Система находилась в равновесии до момента, когда верхнюю нить перебил дятел. Гири́ки упали на землю одновременно. Каково расстояние от ветки до земли?

В.Дятлов

Ф2245. «Водяная ракета» представляет собой полторалитровую бутылку с резиновой пробкой, в которую налито небольшое количество воды массой $m = 200$ г. Ракета несет полезный груз, укрепленный на ее корпусе снаружи. На какую высоту взлетит ракета, запущенная вертикально вверх из перевернутого положения, в результате быстрого выброса воды при повышении давления в бутылке до $p = 5$ атм? В момент старта ракета была неподвижна. Общая масса взлетевшей ракеты с «боеголовкой» $M = 0,5$ кг. Считайте, что давление в бутылке при выбросе воды меняется несильно. Массой пробки пренебречь.

А.Гуденко

Ф2246. Вася нашел старую медную проволоку с сильно попорченной изоляцией. Намереваясь сдать медь в пункт приема цветных металлов, он скомкал проволоку и бросил комок в костер. После такой обработки полностью избавленная от изоляции медь массой 2 кг имела температуру 600°C . Вася зацепил проволоку железной кочергой и, не торопясь, опустил горячий комок проволоки в открытое ведро с 5 литрами воды. Когда шипение прекратилось, Вася круговыми движениями комка проволоки перемешал воду в ведре. Начальная температура воды была 20°C . Какой стала температура воды в ведре после того, как медь остыла? Молярная масса меди $63,5$ г/моль, молярная теплоемкость меди 25 Дж/(моль $\cdot$ К), молярная теплота испарения воды 40 кДж/моль.

В.Паров

Ф2247. В большом сосуде с жесткими и не проводящими тепло стенками находится газообразный водород при температуре $T_1 = 50$ К. При такой температуре вращательные степени свободы двухатомных молекул водорода «заморожены». Предположим, что эти степени свободы «размораживаются» при фиксированной температуре $T_0 = 80$ К. Сосуд движется с некоторой скоростью v , а затем сталкивается с очень жестким препятствием и мгновенно останавливается. Какая температура T_2 установится в сосуде? Теплоемкостью стенок сосуда можно пренебречь.

С.Варламов

Ф2248. Если две одинаковые проводящие пластины, каждая площадью S , находятся на расстоянии $d \ll \sqrt{S}$ параллельно друг другу, то электрическая емкость такого конденсатора равна C . Четыре такие пластины расположены параллельно друг другу, расстояния между соседними пластинами равны d и две внешние пластины соединяются тонким проводом (рис.1, случай А). Какова емкость системы проводников в этом случае, если ее измеряют между указанными на рисун-

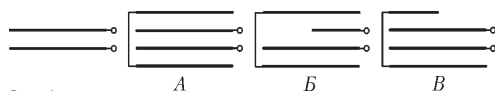


Рис. 1

ке точками? Затем от одной из пластин отрезали и удалили половину (по площади). Какова теперь емкость системы проводников (случаи Б и В)?

С.Дмитриев

Ф2249. Вокруг закрепленного точечного положительного заряда Q вращается небольшой отрицательный заряд $-q$ с массой m . Каков период его обращения, если наибольшее расстояние между зарядами в процессе движения в три раза больше наименьшего расстояния, равного r_0 ?

А.Гуденко

Ф2250. На одном конце легкой и достаточно длинной пружины укреплен массивный шарик. Другой конец пружины жестко удерживается в тисках. Пружина имеет большую продольную жесткость и гораздо меньшую «изгибную» жесткость, а шарик может совершать колебания, изгибая пружину. Когда ось пружины в положении равновесия занимает вертикальное положение и шарик находится выше закрепленного конца пружины, то период малых колебаний равен $T_{\text{верх}}$. Если же шарик находится ниже закрепленного конца пружины, то период малых колебаний равен $T_{\text{нижн}} < T_{\text{верх}}$. Каким будет период малых колебаний шарика, если ось пружины в положении равновесия занимает горизонтальное положение? Длина пружины вдоль ее оси при всех рассматриваемых положениях шарика практически не меняется.

В.Сергеев

Ф2251. К сети переменного тока напряжением 220 В и частотой 50 Гц точками В и G Вася подключил электрическую схему из различных элементов (рис.2).

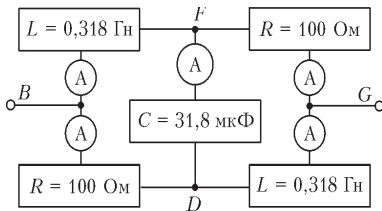


Рис. 2

У элементов схемы значения таковы, что $R = L\omega = 1/(C\omega) = 100 \text{ Ом}$. Идеальные амперметры показывают эффективные значения тока. Чему равны эти значения?

А.Зильберман

Ф2252. По проекту в Большом адронном коллайдере протоны во встречных пучках будут летать, имея каждый энергию $E = 7 \text{ ТэВ} = 7 \cdot 10^{12} \text{ эВ}$. При этом скорость движения частиц всего на несколько метров в секунду меньше скорости света в вакууме c . Связь между энергией E частицы и модулем ее импульса p при таких условиях выглядит очень просто: $E \approx cp$. Магнитное поле обеспечивает движение частиц по кольцу общей длиной $L = 27 \text{ км}$. Второй закон Ньютона в виде $\Delta \vec{p}/\Delta t = \vec{F}$ при таких скоростях остается справедливым. Считая кольцо круглым, оцените модуль индукции магнитного поля, перпендикулярного плоскости кольца.

В.Бак

Решения задач M2214–M2228, Ф2228–Ф2233

M2214. На доске выписаны $N \geq 4$ чисел. Оказалось, что сумма любых трех выписанных чисел также является выписанным числом. Какое наименьшее количество нулей может быть среди этих чисел?

Ответ: 0 при $N = 4$, $N - 2$ при $N \geq 5$.

Для $N = 4$ пример из чисел 1, 1, -1 , -1 удовлетворяет условию, т.е. нулей может не быть вовсе.

Пусть теперь $N \geq 5$. Пример из $N - 2$ нулей и чисел 1, -1 удовлетворяет условию, поэтому количество нулей может быть равно $N - 2$.

Предположим, что количество нулей меньше $N - 2$, т.е. имеется хотя бы 3 ненулевых числа (среди них найдутся два одного знака). Если ненулевых чисел хотя бы 5, то найдутся три числа одного знака. Иначе среди данных N чисел имеется ноль. В любом случае либо на доске найдутся три неотрицательных числа, среди которых хотя бы два строго положительных, либо найдутся три неположительных числа, среди которых хотя бы два строго отрицательных. В первом случае пусть это числа $a > 0$, $b > 0$, $c \geq 0$, причем пусть a — наибольшее из всех выписанных чисел. Но тогда число $a + b + c > a$, поэтому $a + b + c$ не может быть выписанным — противоречие.

Второй случай разбирается аналогично.

И.Богданов

M2215. а) Найдите все тройки простых чисел p , q , r такие, что четвертая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.

б) Существует ли четверка простых чисел p , q , r , s такая, что шестая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение трех остальных?

а) Ответ: 2, 3, 5.

Ясно, что любые два числа тройки различны (если $p = q$, то $p^4 - 1$ не делится на q). Пусть для определенности p — наименьшее из чисел тройки. Нам известно, что число $p^4 - 1 = (p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)$ делится на qr . Заметим, что $p - 1$ меньше любого из простых чисел q и r , а значит, взаимно просто с ними. Далее, число $p^2 + 1$ не может делиться на оба числа q и r , так как $p^2 + 1 < (p + 1)(p + 1) < qr$. Значит, $p + 1$ делится на одно из них — для определенности, на q . Поскольку $q > p$, это возможно лишь при $q = p + 1$. Тогда одно из чисел p и q четно, а поскольку оно простое, то $p = 2$, $q = 3$. Наконец, r является простым делителем числа $p^4 - 1 = 15$, отличным от $q = 3$, значит, $r = 5$. Осталось проверить, что тройка 2, 3, 5 удовлетворяет условиям задачи.

б) Ответ: не существует.

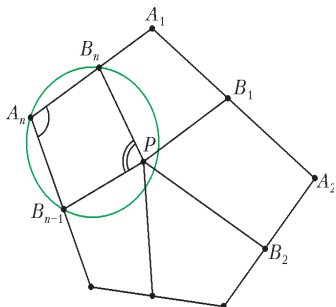
Предположим, что нужная четверка p , q , r , s нашлась. Построим рассуждения так же, как и в пункте а). Аналогично а), покажем, что любые два из чисел p , q , r , s различны, и выберем из данной четверки наименьшее число — пусть для определенности это p . По условию $p^6 - 1 = (p - 1)(p + 1)(p^2 + p + 1)(p^2 - p + 1)$

делится на qrs . Заметим, что $p \neq 2$, так как $2^6 - 1 = 63$ имеет всего два простых делителя. Поэтому $p - 1$ и $p + 1$ меньше любого из простых чисел q, r, s , и, значит, $(p - 1)(p + 1)$ не делится ни на одно из чисел q, r, s . Далее, каждое из чисел $p^2 + p + 1$, $p^2 - p + 1$ может делиться не более чем на одно из чисел q, r, s , так как произведение любых двух из чисел q, r, s больше чем $(p + 1)(p + 1) > p^2 + p + 1$. Таким образом, $(p - 1)(p + 1)(p^2 + p + 1)(p^2 - p + 1)$ делится не более чем на два из трех чисел q, r, s . Противоречие.

П.Кожевников, В.Сендеров

M2216. На сторонах $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ выпуклого многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ взяты точки $B_1, B_2, \dots, B_n$ соответственно. Докажите, что круги, описанные вокруг треугольников $B_nA_1B_1, B_1A_2B_2, B_2A_3B_3, \dots, B_{n-1}A_nB_n$, покрывают весь многоугольник.

Пусть P – произвольная точка внутри данного многоугольника (см. рисунок). Сумма $(\angle B_nA_1B_1 +$



$+ \angle B_1A_2B_2 + \dots + \angle B_{n-1}A_nB_n) + (\angle B_nPB_1 + \angle B_1PB_2 + \dots + \angle B_{n-1}PB_n)$ равна $(n - 2) \cdot 180^\circ + 360^\circ = n \cdot 180^\circ$, поэтому хотя бы одна из n сум $(\angle B_nA_1B_1 + \angle B_nPB_1)$, $(\angle B_1A_2B_2 + \angle B_1PB_2)$, $\dots$, $(\angle B_{n-1}A_nB_n + \angle B_{n-1}PB_n)$ не меньше 180° . Но неравенство $(\angle B_{i-1}A_iB_i + \angle B_{i-1}PB_i) \geq 180^\circ$ означает, что точка P лежит внутри или на границе окружности, описанной около треугольника $B_{i-1}A_iB_i$ (здесь считаем $B_0 = B_n$).

Отметим, что идея этого решения встречалась ранее в классической задаче о том, что выпуклый четырехугольник целиком покрывается кругами, построенными на его сторонах как на диаметрах.

П.Кожевников, Н.Седракан

M2217. Найдите все наборы из $n \geq 2$ чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, удовлетворяющие равенствам

$$|a_1 - a_2| = 2|a_2 - a_3| = 3|a_3 - a_4| = \dots = n|a_n - a_1|.$$

Ответ: наборы из n равных чисел.

Если $a_1 = a_2$, то последовательно получаем, что все числа равны. Все наборы из равных чисел удовлетворяют условию.

Докажем, что других искомым наборов нет. Предположим, что $a_1 \neq a_2$ и $a_1 - a_2 = A$. Тогда $a_2 - a_3 = \pm \frac{A}{2}$ (при некотором выборе знака), $a_3 - a_4 = \pm \frac{A}{3}$, ...

$\dots, a_n - a_1 = \pm \frac{A}{n}$. Из равенства $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_n - a_1) = 0$ следует, что при некотором выборе знаков плюс и минус верно равенство

$$A \left(1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \dots \pm \frac{1}{n} \right) = 0.$$

Теперь достаточно показать, что сумма $1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \dots \pm \frac{1}{n}$ ни при каком натуральном $n \geq 2$ не равна целому числу. Пусть 2^k (k – натуральное) – наибольшая степень двойки, не превосходящая n . Тогда при приведении указанной суммы дробей к общему знаменателю (равному НОД $(1, 2, \dots, n)$) во всех дробях, кроме одной дроби $\pm \frac{1}{2^k}$, числитель будет четный. Таким образом, после сложения получим дробь с нечетным числителем и четным знаменателем. Она не равна целому числу.

П.Кожевников

M2218. Прямую палку длиной $2M$ сантиметров распилили на N палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров. При каком наименьшем N можно гарантировать, что, используя все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника?

Ответ: $M + 2$ (здесь $M \geq 2$).

Пусть $N \leq M + 1$. Распилим палку на $N - 1$ палочку длиной 1 и одну палочку длиной $2M + 1 - N$. Из полученного набора невозможно сложить прямоугольник, так как палочка длиной $2M + 1 - N$ не меньше полупериметра и, значит, не может быть частью никакой стороны прямоугольника. Таким образом, $N \geq M + 2$.

Покажем, что при $N = M + 2$ искомым прямоугольник найдется. Пусть $l \geq 2$ – наибольшая среди длин всех палочек. Пусть x – количество палочек длины 1. Тогда кроме этих x палочек и палочки длиной l имеется $M + 1 - x$ палочек, длина каждой из которых не меньше 2. Отсюда $l + x + 2(M + 1 - x) \leq 2M$, и, значит, $x \geq l + 2$. Итак, имеется по крайней мере $l + 2$ палочки длины 1. Отложим две палочки длины 1 – из них сделаем две единичные стороны прямоугольника, останется еще l палочек длины 1. Начнем выкладывать палочки в ряд в порядке убывания длин с целью выложить одну сторону, равную $M - 1$. Пусть на каком-то шаге ряд имел длину $L < M - 1$, а после добавления очередной палочки длиной m стал иметь длину $L + m > M + 1$. Тогда уберем последнюю выложенную палочку длины m и вместо нее положим $M - 1 - L$ единичных палочек (это можно сделать, так как $M - 1 - L < m \leq l$). Теперь у нас выложены три стороны прямоугольника (1, 1 и $M - 1$). Выложив оставшиеся палочки в ряд, получим еще одну сторону длины $M - 1$.

Замечание. У задачи имеются и более «профессиональные» доказательства возможности выложить прямоугольник при $N = M + 2$.

Приведем, например, следующее красивое рассуждение. Рассмотрим окружность длины $2M$ и разобьем ее

$M + 2$ красными точками на дуги, равные по длине длинам палочек. Эти точки являются некоторыми $M + 2$ вершинами правильного $2M$ -угольника T , вписанного в эту окружность. Вершины многоугольника T разбиваются на пары противоположных. Таких пар M , а красных точек $M + 2$, значит, среди красных точек найдутся две пары противоположных.

Эти две пары точек делят окружность на две пары равных дуг. Таким образом, мы разбили все палочки на четыре группы A, B, C, D , причем суммарные длины в группах A и C , а также в группах B и D равны. Значит, можно составить прямоугольник, используя каждую группу для составления одной его стороны.

А.Магазинов

M2219. Две неравные окружности ω_1 и ω_2 касаются внутренним образом окружности ω в точках A и B . Пусть C и D — точки пересечения окружностей ω_1 и ω_2 (C и D лежат внутри ω). Прямая CD пересекает ω в точках E и F . Докажите, что касательные к ω , проведенные в точках E и F , пересекаются на прямой AB .

Пусть a и b — общие касательные к окружностям ω, ω_1 и ω, ω_2 в точках A и B . Тогда прямые a, b, EF являются радикальными осями окружностей $\omega, \omega_1, \omega_2$, поэтому они пересекаются в одной точке T или параллельны (см. рисунок). В последнем случае вся картинка симметрична относительно прямой AB , и утверждение задачи очевидно.

Рассмотрим теперь первый случай. Из подобия пар треугольников TAE и TFA , а также TBE и TFB имеем

$$\frac{AE}{FA} = \frac{TE}{TA} = \frac{TE}{TB} = \frac{BE}{FB}.$$

Значит, $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FB}$. Если $AE = EB$ и $AF = FB$, то картинка симметрична относительно EF , что невозможно (так как окружности ω_1 и ω_2 не равны). Пусть касательные в точках E и F пересекают AB в точках S и S' . Тогда из подобных треугольников SAE и SEB

$$\frac{SA}{SB} = \frac{SA}{SE} \cdot \frac{SE}{SB} = \frac{AE}{EB} \cdot \frac{AE}{EB} = \frac{AE^2}{EB^2}.$$

Аналогично, $\frac{S'A}{S'B} = \frac{AF^2}{FB^2}$, т.е. $\frac{SA}{SB} = \frac{S'A}{S'B}$, откуда $S = S'$. Это и требовалось доказать.

Замечание. Последняя часть решения — по сути доказательство эквивалентности различных условий того, что четырехугольник $AEBF$ гармонический.

П.Кожеников

M2220. Скандалист и n нормальных зрителей купили билеты в театр. Билеты на s мест оказались нераспроданы. Скандалист, растолкав всех, первым вошел в зал и сел на случайно выбранное им место, не поинтересовавшись номером своего места. После этого

остальные зрители действовали по следующим правилам: если указанное в билете место свободно, то зритель садится на свое место; если место занято, то зритель садится на любое еще не занятое место. Какова вероятность того, что последний вошедший в зал зритель сядет не на свое место?

Ответ: $1/(s+2)$.

Используем индукцию по n . База: при $n = 1$ скандалист занимает одно из $s + 2$ мест, значит, место нормального зрителя занято с вероятностью $1/(s+2)$.

Докажем переход индукции. Рассмотрим нормального зрителя A , который входит в зал сразу после скандалиста. В тех вариантах, когда A садится на свое место, задача сводится к уже решенной; число зрителей на единицу меньше (зрителя A можно просто не принимать в расчет). Если же место зрителя A занял скандалист, тогда A садится на случайное свободное место, сам «превращаясь» в скандалиста (можно представить, что, наоборот, A сел на свое место, а скандалист пошел на какое-то случайное свободное место — при такой трактовке этот шаг решения становится почти очевидным!), и задача снова сводится к уже решенной (число зрителей на единицу меньше).

Таким образом, ответ в задаче не зависит от n .

Отметим, что в случае $s = 0$ задача превращается в известную задачу математического фольклора про «сумасшедшую старушку» (старушка входит первой в салон самолета и занимает случайное место, а далее, как и в нашей задаче, пассажиры по очереди занимают свои места, каждый раз пересаживаясь на случайное свободное место, если свое место уже занято).

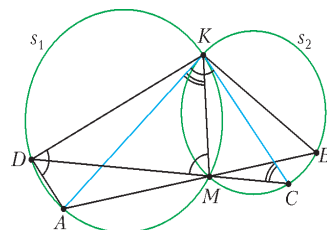
А.Спивак

M2221. Окружности s_1 и s_2 пересекаются в точках K, M . Через точку K проведены касательные к s_2 и s_1 , которые вторично пересекают s_1 и s_2 в точках A и C соответственно. Прямая AM пересекает вторично s_2 в точке B , а прямая CM пересекает вторично s_1 в точке D . Докажите, что $AB = CD$.

Пусть точки расположены, как показано на рисунке (другие случаи расположения рассматриваются аналогично). Углы KAM и KDM опираются на одну дугу окружности s_1 , поэтому они равны. Аналогично, равны углы KCM и KBM . В треугольниках KAB и KDC равны две пары углов, т.е. они подобны.

Далее, $\angle DAK = \angle DMK$; используя теорему об угле между касательной и хордой, имеем

$$\begin{aligned} \angle ADK &= \angle AKC = \angle AKM + \angle MKC = \\ &= \angle KCM + \angle MKC = \angle DMK. \end{aligned}$$



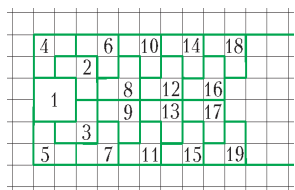
Мы получили, что $\angle DAK = \angle ADK$, поэтому треугольник ADK равнобедренный: $KD = KA$. Значит, подобные треугольники KAB и KDC равны, откуда вытекает утверждение задачи.

И.Рудаков

M2222. Дан клетчатый прямоугольник $6 \times N$ ($N \geq 3$), в котором изначально все клетки покрашены синим. За один ход можно покрасить в красный цвет все единичные квадратики некоторого клетчатого квадрата 2×2 , в котором есть хотя бы три синие клетки (в процессе некоторые клетки могут быть покрашены в красный цвет больше одного раза). Какое максимальное количество ходов можно сделать?

Ответ: $2N - 1$.

После первого хода на доске появилось 4 красных клетки, после каждого следующего добавляется не менее 3 красных клеток, таким образом, после k ходов в прямоугольнике будет не менее $4 + 3(k - 1) = 3k + 1$ красных клеток. С другой стороны, это количество не больше $6N$, откуда $k \leq 2N - \frac{1}{3}$, а значит, $k \leq 2N - 1$.



Пример последовательности из $2N - 1$ ходов приведен на рисунке (под номером k ($k \geq 2$) отмечается уголок из трех красных клеток, появившихся на k -м ходу).

П.Кожевников

M2223. Решите в целых числах уравнение $x^3 + y^3 + 6xy = 8$.

Ответ: $(-2, -2)$; $(x, 2 - x)$, где x — целое.

Данное уравнение эквивалентно уравнению $x^3 + y^3 + (-2)^3 - 3 \cdot (-2)xy = 0$. Воспользуемся тождеством

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca),$$

где $a = x$, $b = y$, $c = -2$. Получаем два варианта:

1) $a + b + c = 0$, тогда $x + y = 2$;

2) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$, т.е. в этом случае $x = y = -2$.

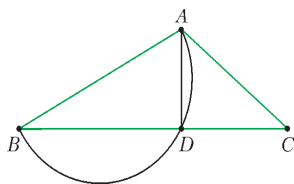
Замечание. Данное уравнение можно решать и по-другому, сведя его к небольшому перебору случаев. Например, при $|x + y| \geq 9$ решений нет, так как в этом случае $|x^3 + y^3| \geq 9|xy|$, поэтому

$$|x^3 + y^3 + 6xy| \geq 9|xy| - 6|xy| = 3|xy| > 8.$$

В.Кириак

M2224. Один треугольник лежит внутри другого. Докажите, что хотя бы одна из двух наименьших сторон (из шести) является стороной внутреннего треугольника.

Пусть ABC — внешний треугольник, и BC — его наибольшая сторона (см. рисунок). Предположим противное: пусть AB и AC — две наименьшие стороны среди всех шести сторон двух треугольников.



Высота AD разбивает треугольник ABC на два прямоугольных треугольника ADB и ADC . Один из этих треугольников содержит хотя бы две вершины внутреннего треугольника. Пусть, для определенности, треугольник ADB содержит вершины X и Y внутреннего треугольника. Но тогда сторона XY содержится внутри треугольника ABD , вписанного в окружность диаметра AB . Итак, отрезок XY лежит строго внутри окружности диаметра AB , значит, $XY < AB$. Противоречие.

А.Акопян, П.Кожевников

M2225. Найдите все многочлены $f(x)$ такие, что для каждого натурального числа n уравнение $f(x) = n$ имеет хотя бы один а) целый корень; б) рациональный корень.

Ответ: а) $f(x) = \frac{x}{k} + \frac{m}{k}$, где m, k — целые, $k \neq 0$;

б) $f(x) = ax + b$, где a, b — рациональные, $a \neq 0$.

Очевидно, ни в задаче а), ни в б) $f(x)$ не может быть постоянным многочленом.

Пусть степень $f(x)$ равна 1, т.е. $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Рассмотрим вопрос а). Из условия следует, что $as + b = 1$ и $at + b = 2$ для некоторых целых s и t . Тогда

$a(t - s) = 1$, значит, $a = \frac{1}{t - s}$, т.е. a имеет вид $\frac{1}{k}$ для некоторого целого k . Тогда $b = \frac{k - s}{k}$, т.е. b имеет вид $\frac{m}{k}$, где m — целое. Легко видеть, что любой многочлен

$f(x) = \frac{x}{k} + \frac{m}{k}$, где m — целое, а k — ненулевое целое, удовлетворяет условию.

Для пункта б) получаем, что $as + b = 1$ и $at + b = 2$ для некоторых рациональных s и t . Отсюда $a = \frac{1}{t - s}$ — рационально, и b — тоже рационально. Легко видеть, что любой многочлен вида $f(x) = ax + b$ с рациональными $a \neq 0$ и b удовлетворяет условию.

Докажем теперь, что ни один многочлен степени не ниже второй не удовлетворяет условиям задач а) и б).

Предположим противное: пусть степень $f(x)$ больше или равна 2, и этот многочлен удовлетворяет условию. Найдём такое $X > 0$, что $|f(x)|$ возрастает на промежутке $[X; +\infty)$, и $|f(x)|$ убывает на промежутке $(-\infty; X]$ (докажите, что такое X найдётся). Тогда если мы возьмём натуральное $N > X$, то для $x \in (-\infty; -N) \cup (N; +\infty)$ имеем $|f(x)| > M = \min\{|f(N)|, |f(-N)|\}$.

Таким образом, для каждого уравнения $f(x) = n$, где n — натуральное число, меньшее M , его корень должен принадлежать отрезку $[-N; N]$.

Теперь нетрудно завершить решение пункта а). Рассмотрим все уравнения $f(x) = n$, где n – натуральное число, меньшее M . Количество рассматриваемых уравнений больше или равно $M - 1$, причем разные уравнения, очевидно, имеют разные корни. С другой стороны, каждый корень – это целое число из отрезка $[-N; N]$ (таких чисел $2N + 1$), значит, $M - 1 \leq 2N + 1$.

С другой стороны, так как степень $f(x)$ больше 1, то при больших N выполнено $|f(N)| > 2N + 2$ и $|f(-N)| > 2N + 2$, значит, $M > 2N + 2$. Противоречие. Чтобы решить задачу б), используем ту же идею об оценке количества корней. Однако потребуются следующие дополнительные соображения.

Вначале предположим, что коэффициенты $f(x)$ рациональны. Домножая уравнение $f(x) - n = 0$ на НОК знаменателей всех коэффициентов многочлена f , получим уравнение $a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ (можно считать $a_d > 0$) с целыми коэффициентами, причем все коэффициенты, кроме a_0 , зависят только от $f(x)$, но не от выбора натурального n . Как известно, если рациональное число $x = \frac{p}{q}$ (где $\text{НОД}(p, q) = 1$) является корнем этого уравнения, то q – делитель старшего

коэффициента a_d , т.е. x равно числу вида $\frac{r}{a_d}$, где r – целое. Теперь можем завершить решение так же, как и в пункте а): рассмотрим все уравнения $f(x) = n$, где n – натуральное число, меньшее M ; каждый корень – это число вида $\frac{r}{a_d}$ (r – целое), принадлежащее отрезку $[-N; N]$ (таких чисел $2Na_d + 1$), значит, $M - 1 \leq 2Na_d + 1$. Так же, как и выше, получаем противоречие для больших N .

Остается понять, что $f(x)$ обязан иметь рациональные коэффициенты. Пусть степень $f(x)$ равна d , и $x_1, x_2, \dots, x_{d+1}$ – рациональные корни уравнений $f(x) = 1, \dots, f(x) = d + 1$ соответственно. С помощью конструкции *интерполяционного многочлена Лагранжа* можно явно указать многочлен $g(x)$ степени не выше d с рациональными коэффициентами и такой, что $g(x_i) = i$ для $i = 1, 2, \dots, d + 1$: $g(x) = \sum_{i=1}^{d+1} i \frac{p_i(x)}{p_i(x_i)}$, где p_i – это произведение $(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{d+1})$, из которого вычеркнут сомножитель $(x - x_i)$. Многочлен $f(x) - g(x)$ имеет степень не выше d , и $d + 1$ различных чисел $x_1, \dots, x_{d+1}$ являются его корнями, значит, он тождественно равен нулю, т.е. $g(x)$ совпадает с $f(x)$.

П. Кожевников

M2226*. Докажите, что количество целочисленных решений неравенства $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_k| \leq n$ равно количеству целочисленных решений неравенства $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leq k$ для любых натуральных n и k .

Как мы узнали, задача M2226 была независимо предложена на национальной олимпиаде Колумбии специ-

алистом в области комбинаторики Федерико Кастильо. Публикуем решение, предложенное составителями Колумбийской олимпиады – возможно, самое изящное среди многих других решений данной задачи.

Через $R(k, n)$ обозначим множество целочисленных решений неравенства $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_k| \leq n$. Нам требуется показать, что $|R(k, n)| = |R(n, k)|$ (здесь и далее через $|X|$ обозначаем количество элементов множества X).

Обозначим через $T(k + 1, n + 1)$ множество целочисленных решений уравнения $x_0 + |x_1| + |x_2| + \dots + |x_k| = n + 1$, в которых $x_0 > 0$. Каждому набору $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ из $R(k, n)$ сопоставим набор $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ из $T(k + 1, n + 1)$, добавив $x_0 = n + 1 - (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_k|)$. Легко видеть, что это соответствие взаимно-однозначно, значит, $|R(k, n)| = |T(k + 1, n + 1)|$. Таким образом, достаточно установить взаимно-однозначное соответствие между $T(k + 1, n + 1)$ и $T(n + 1, k + 1)$.

Каждый набор $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ из $T(k + 1, n + 1)$ разобьем на *блоки*: в один блок входит ненулевое число и несколько (возможно, ноль) следующих за ним нулей вплоть до следующего ненулевого числа. *Знаком* блока назовем знак входящего в него ненулевого числа. *Весом* блока назовем модуль входящего в него ненулевого числа. *Длиной* блока назовем количество входящих в него чисел. Теперь в наборе $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ из $T(k + 1, n + 1)$ заменим каждый блок B на *обратный* блок B' того же знака, что и B , такой, что длина B' совпадает с весом B , а вес B' совпадает с длиной B (см. пример в конце решения задачи).

После этой замены набор $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k)$ из $T(k + 1, n + 1)$ превратится в набор из $T(n + 1, k + 1)$. Повторная замена каждого блока на обратный приведет к исходному набору из $T(k + 1, n + 1)$. Таким образом, предъявлено взаимно-однозначное соответствие между $T(k + 1, n + 1)$ и $T(n + 1, k + 1)$.

Пример: $(3, 0, -2, 1, -2, 0, 0) \in T(7, 8)$.

Разбиение на блоки: $(3, 0, \underline{-2}, 1, \underline{-2}, 0, 0)$.

Замена каждого блока на обратный

$$(\underline{3}, \underline{0}, \underline{-2}, \underline{1}, \underline{-2}, \underline{0}, \underline{0}) \rightarrow (\underline{2}, \underline{0}, \underline{0}, \underline{-1}, \underline{0}, \underline{1}, \underline{-3}, \underline{0})$$

дает набор из $T(8, 7)$.

Имеются и другие пути решения данной задачи. Например, можно установить явную формулу

$|R(k, n)| = \sum_{r=0}^{\min(k, n)} C_k^r C_n^r 2^r$, из которой сразу вытекает утверждение задачи.

П. Кожевников

M2227*. Пусть a, b, c – натуральные взаимно простые в совокупности числа,

$$D_n = \text{НОД}(a + b + c, a^2 + b^2 + c^2, a^n + b^n + c^n).$$

а) Докажите, что при любом n , не делящемся на 3, число D_n может быть сколь угодно велико.

б) Найдите все возможные значения D_n при каждом n , делящемся на 3.

а) Положим $a = 1$, $b = x$, $c = x^2$, где x – натуральное число. Достаточно доказать, что при $k \neq 3t$ число $x^{2k} + x^k + 1$ делится на $x^2 + x + 1$, или, эквивалентно:

$$A = (x^{2k} + x^k) - (x^2 + x) \text{ делится на } x^2 + x + 1.$$

Если k дает остаток 1 при делении на 3, то имеем $A = x^2(x^{2k-2} - 1) + x(x^{k-1} - 1)$ делится на $x^3 - 1$, что в свою очередь делится на $x^2 + x + 1$. Если же k дает остаток 2 при делении на 3, то имеем $A = x(x^{2k-1} - 1) + x^2(x^{k-2} - 1)$ делится на $x^3 - 1$.¹

б) **Ответ:** 1, 2, 3, 6.

Пусть $n = 3t$. Предположим, что D_n делится на простое $p > 3$. Имеем $a \equiv -(b+c) \pmod{p}$, поэтому $0 \equiv a^2 + b^2 + c^2 \equiv 2(b^2 + bc + c^2) \pmod{p}$. Отсюда $b^2 + bc + c^2$ делится на p , и, значит, $b^3 - c^3$ делится на p , т.е. $b^3 \equiv c^3 \pmod{p}$. Аналогично рассуждая, имеем $a^3 \equiv c^3 \pmod{p}$. Поэтому $0 \equiv a^{3t} + b^{3t} + c^{3t} \equiv 3c^{3t} \pmod{p}$. Следовательно, c делится на p , а значит, a и b тоже делятся на p . Противоречие с условием $\text{НОД}(a, b, c) = 1$.

Таким же образом доказываем, что D_n не делится на 9 (повторяя предыдущие рассуждения для $p = 9$, в конце получаем, что a , b и c делятся на 3 – противоречие).

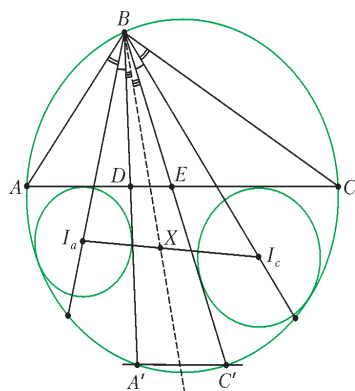
Если D_n четно, то $a + b + c$ четно, значит, среди чисел a , b , c должно быть два нечетных числа и одно четное. Но тогда $a^2 + b^2 + c^2$ имеет остаток 2 при делении на 4. Таким образом, D_n не делится на 4.

С другой стороны, для любого натурального n число D_n может равняться 1, 2, 3, 6. Как легко видеть, при $a = b = 1$, $c = 3$: $D_n = 1$; при $a = b = 1$, $c = 2$: $D_n = 2$; при $a = b = c = 1$: $D_n = 3$; при $a = b = 1$, $c = 4$: $D_n = 6$.

В.Сендеров

M2228*. Треугольник ABC вписан в окружность (см. рисунок). На дуге AC (не содержащей B) взяты точки A' и C' так, что $AC \parallel A'C'$. Отрезки BA' и BC' пересекают отрезок AC в точках D и E соответственно. Окружности ω_a и ω_c вписаны в криволинейные треугольники ADA' и CEC' соответственно. Докажите, что точка пересечения внутренних касательных окружностей ω_a и ω_c лежит на биссектрисе угла ABC .

Рассмотрим преобразование h , равное композиции (т.е. последовательному применению) инверсии с центром B радиусом $\sqrt{BA \cdot BC}$ и симметрии относительно биссектрисы угла ABC . Заметим, что $h(A) = C$, $h(C) = A$, h переводит прямую AC в окружность ABC и, наоборот, h переводит прямую BA' в BC' (так как $\angle ABA' = \angle CBC'$). Отсюда следует, что $h(\omega_a) = \omega_c$.



Таким образом, ω_a и ω_c видны из точки B под равными углами, а биссектриса угла I_aBI_c (I_a и I_c – центры окружностей ω_a и ω_c) совпадает с биссектрисой угла ABC . Остается воспользоваться следующим утверждением.

Утверждение. Пусть окружности ω_a и ω_c с центрами I_a и I_c видны под равными углами из точки B . Тогда точки пересечения двух внутренних и двух внешних общих касательных к ω_a и ω_c лежат на биссектрисах (внутренней и внешней) угла I_aBI_c .

Доказательство. Пусть I_aI_c пересекает биссектрису угла I_aBI_c в точке X . Из условия $BI_a/BI_c = r_a/r_c$ (r_a и r_c – радиусы окружностей), а по свойству биссектрисы $BI_a/BI_c = XI_a/XI_c$, откуда $XI_a/XI_c = r_a/r_c$, значит, X – центр гомотетии (с положительным или отрицательным коэффициентом) окружностей ω_a и ω_c , т.е. точка пересечения общих (внешних или внутренних) касательных.²

П.Кожевников

Ф2228. На гладкой безграничной горизонтальной поверхности нарисован квадрат с длиной ребра $2a$. Ребра квадрата ориентированы в направлениях север-юг и восток-запад. В углы квадрата вертикально вбиты четыре тонких гвоздя, которые выступают над поверхностью. К юго-восточному гвоздю с координатами относительно центра квадрата ($-1a$ на север; $+1a$ на восток) прикреплена тонкая невесомая нерастяжимая нить длиной $100a$, которая выдерживает максимальную силу растяжения F . Нить выпрямлена и вытянута в направлении от места крепления на восток. К свободному концу нити прикреплена шайба малых размеров массой M . Шайбе придали толчком скорость v в направлении на север. Какими будут координаты шайбы через время t после толчка? Числовые значения параметров: $m = 1$ кг, $a = 1$ см, $F = 1,18$ Н, $t = 20$ с, $v = 1$ м/с. При решении задачи рекомендуется пользоваться компьютером.

Сначала разберем возможные варианты движения шайбы в общем виде, а затем, подставив численные

¹ Другое доказательство делимости многочлена $x^{2k} + x^k + 1$ на $x^2 + x + 1$ можно дать с помощью подстановки комплексных значений $\sqrt[3]{1}$.

² Другое доказательство можно получить, рассмотрев окружность ω_a , симметричную ω_c относительно биссектрисы угла I_aBI_c , и применив к окружностям ω_a , ω_a' и ω_c теорему о трех гомотетиях.

значения, узнаем, какой из вариантов на самом деле реализовался.

Если величина $mv^2/(100a) > F$, то нить порвется сразу после толчка шайбы и шайба полетит (заскользит) в направлении на север. Тогда ее координаты в момент времени t будут $(vt - a; 1a)$. Это справедливо при условии, что найденные величины координат все-таки много меньше радиуса Земли.

Если указанное неравенство не выполняется, то по мере наматывания нити на гвозди ее сила натяжения растет «скачками» и в некоторый момент может превысить значение F . Иными словами, при выполнении неравенства $mv^2/(2a) > F$ нить порвется в тот момент, когда ее «свободный» участок будет меньше величины mv^2/F . Пусть $mv^2/F = a(100 - 2N + n)$, где $2N$ – целое четное число, меньшее 100, а $0 < n < 2$. Тогда к моменту разрыва нити шайба может проскользнуть по поверхности путь

$$s = 0,5\pi(100a + 98a + \dots + (100 - 2N)a).$$

Скольжение происходит с неизменной по величине скоростью v . Если $t < s/v$, то нить к этому моменту еще не порвалась, а если $t > s/v$, то нить уже успела порваться. И так далее...

Понятно, что вариантов для исследования очень много и для сужения круга поиска нужно воспользоваться данными в условии численными значениями величин. Данное в условии значение предельной величины силы $F = 1,18$ Н больше величины $mv^2/(100a) = 1$ Н, но $mv^2/(100a - N_{\min} \cdot 2a) > 1,18$ Н. Отсюда находим: $N_{\min} = 9$, т.е. при $N = 8$ нить еще не рвется. Следовательно, путь, пройденный шайбой до момента разрыва нити, равен

$$s = 0,5\pi(100a + 98a + \dots + 84a) = 13,006 \text{ м}.$$

Оказывается, в течение первых 13 секунд шайба оставалась прикрепленной к нити, а в момент 13,006 с нить порвалась. К этому моменту скорость нити вновь приобрела направление на север, а свободный участок нити укоротился на 16 см. Оставшиеся почти 7 секунд (без 0,006 с) шайба двигалась с постоянной скоростью. Итак, координаты шайбы к моменту времени 20 с после толчка таковы: (699 см на север; 85 см на восток).

С.Дмитриев

Ф2229. Вокруг Земли летают с выключенными двигателями два спутника. Периоды обращения этих спутников одинаковы и составляют 12 часов. На какое максимальное расстояние могут удаляться друг от друга эти два спутника? Для справки: периоды обращения вокруг Земли всех спутников, летающих на «низких» орбитах, равны примерно 1,5 часа.

Согласно первому закону Кеплера, спутники Земли в системе отсчета с началом в центре Земли и с осями, направленными на далекие звезды, летают по орбитам, которые имеют форму эллипсов. Центр Земли находится в фокусе (одном из двух) каждого из таких эллипсов. Согласно третьему закону Кеплера, отношения больших осей орбит спутников D_1 и D_2 и их

периодов T_1 и T_2 связаны формулой

$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2.$$

Низколетающие спутники имеют диаметр орбиты $D_1 \approx 2R_3$ и период $T_1 = 1,5$ ч. Следовательно, большие оси эллипсов, по которым спутники летают с периодом $T_2 = 12$ ч (в 8 раз больше, чем 1,5 ч), равны $D_2 \approx 8R_3$. Каждый из спутников может удаляться от центра Земли на максимальное расстояние, приблизительно равное $7R_3$. Максимальное расстояние между двумя такими спутниками составляет

$$L_{\max} \approx 14R_3 \approx 89,6 \cdot 10^3 \text{ км}.$$

А.Полетаев

Ф2230. Фиксированная масса идеального газа участвовала в процессе, который в координатах p – V выглядит почти окружностью (см. рисунок). В точках 1 и 5 этой почти окружности касаются изобары, в точках 2 и 6 – изотермы, в точках 3 и 7 – адиабаты и в точках 4 и 8 – изохоры. На разных участках цикла газ обменивался теплом с окружающей средой. Известны абсолютные величины количеств теплоты:

$Q_{12} = 7 \text{ Дж}$, $Q_{23} = 2 \text{ Дж}$,
 $Q_{34} = 4 \text{ Дж}$, $Q_{45} = 11 \text{ Дж}$, $Q_{56} = 5 \text{ Дж}$, $Q_{67} = 1 \text{ Дж}$,
 $Q_{78} = 3 \text{ Дж}$ и $Q_{81} = 12 \text{ Дж}$. Найдите КПД цикла.

Именно точки 3 и 7 касания адиабат являются точками, разделяющими цикл на два участка, на одном из которых газ только получал, а на другом – только отдавал тепло. Стало быть, КПД цикла равен

$$\eta = 1 - \frac{Q_{34} + Q_{45} + Q_{56} + Q_{67}}{Q_{78} + Q_{81} + Q_{12} + Q_{23}} = \frac{1}{8} = 12,5\%.$$

С.Крюков

Ф2231. В тройной точке воды при температуре 273,16 К и давлении водяных паров 610 Па жидкая, твердая и газообразная фазы воды находятся в состоянии термодинамического равновесия. Молекулы газообразной фазы бьются о поверхность конденсированного вещества и создают одинаковые давления и на поверхность льда, и на поверхность воды. Оцените отношение «коэффициентов прилипания» молекул к плоским поверхностям конденсированного твердого и конденсированного жидкого веществ при ударе о них молекул, находящихся в газовой фазе при этой температуре (или, что то же самое, оцените отношение скоростей испарения жидкой воды и твердого льда при температуре ≈ 273 К, если над ними вакуум).

Молярная теплота плавления льда вблизи температуры 273 К составляет примерно 6 кДж/моль, а молярная теплота парообразования из твердого льда равна

51 кДж/моль. Соответственно, молярная теплота парообразования из жидкой воды при этой же температуре равна 45 кДж/моль. Пусть s – единицы поверхности воды в твердом и жидком состоянии в единицу времени в вакуум уходят количества молекул n_t и $n_{ж}$ соответственно. Каждая испарившаяся с поверхности молекула «собрала» при случайных ударах с соседними молекулами кинетическую энергию поступательного движения, которая позволила ей преодолеть потенциальный барьер и «оторваться» от соседок. Эта энергия во много раз больше средней кинетической энергии хаотического теплового поступательного движения молекул в направлении «ухода», т.е. перпендикулярно границе раздела конденсированной и газообразной фаз вещества, равной $RT/2 \approx 1,1$ кДж/моль. Согласно закону Больцмана, вероятности «ухода» молекул с поверхностей одной и другой фаз конденсированного вещества относятся как

$$\frac{n_{ж}}{n_t} = e^{\frac{\Delta E}{RT}} = e^{\frac{6 \text{ кДж}}{8,31 \cdot 273 \text{ Дж}}} = 14,$$

т.е. с поверхности жидкой воды молекулы уходят в пар в 14 раз чаще, чем с поверхности льда. Это означает, что вероятность прилипания к жидкой поверхности для молекулы, ударившей об эту поверхность, больше, чем при ударе о твердую поверхность при той же температуре.

Попробуем «на пальцах» объяснить причины столь большой разницы. Удар молекулы о поверхность конденсированного вещества соответствует ее взаимодействию не с одной молекулой, а с целым коллективом молекул. Масса этого коллектива гораздо больше массы одной молекулы, поэтому она с большей вероятностью отскакивает от поверхности. Если рассматривать модель абсолютно упругого лобового удара движущейся легкой частицы массой m с покоящейся тяжелой частицей массой M , то потеря энергии после отскока составит определенную часть от первоначально имевшейся энергии, а именно

$$\frac{\Delta W}{W_0} = 4 \frac{Mm}{(M+m)^2} \approx 4 \frac{m}{M}.$$

Чем больше масса коллектива молекул, с которым при ударе о поверхность взаимодействует молекула, тем меньше энергии она теряет.

Скорости звука в жидкой воде и в толще льда отличаются: 1,5 км/с для воды и 4 км/с для льда. Это означает, что за одинаковое (примерно) время взаимодействия молекулы с поверхностью конденсированного вещества звуковые волны во льду захватывают объем вещества примерно в $(4/1,5)^3 \approx 19$ раз больший, чем в жидкой воде, т.е. средняя масса «ледяного коллектива» значительно больше средней массы «водного коллектива». Это обстоятельство и объясняет такую большую разницу вероятностей прилипания молекулы.

С.Тройнов

Ф2232. Средний срок службы ламп накаливания (с номиналами 100 Вт, 220 В) и люминесцентных ламп

с одинаковой производительностью по свету примерно один и тот же – около 2000 часов. Эффективность ламп накаливания в 5 раз меньше, чем люминесцентных. Стоимости этих ламп отличаются в 15 раз: 10 руб. и 150 руб. за штуку (люминесцентные дороже). При какой стоимости 1 кВт·ч электроэнергии выгодно покупать и использовать более дорогие лампы?

Выгодно покупать и использовать люминесцентные лампы только при выполнении следующего неравенства:

$$150 \text{ руб.} + 0,1 \text{ кВт} \cdot 2000 \text{ ч} \cdot x (\text{руб}/(\text{кВт} \cdot \text{ч}))/5 <$$

$$< 10 \text{ руб.} + 0,1 \text{ кВт} \cdot 2000 \text{ ч} \cdot x (\text{руб}/(\text{кВт} \cdot \text{ч})),$$

где x – это цена одного киловатт-часа электроэнергии. Отсюда находим

$$x > 0,875 \text{ руб}/(\text{кВт} \cdot \text{ч}).$$

С.Варламов

Ф2233. Каждый сорт стекла характеризуется показателем преломления n_0 в середине оптического диапазона при длине волны $\lambda_0 = 0,55$ мкм и коэффициентом дисперсии β , который показывает, на сколько отличается показатель преломления данного сорта стекла при заданной длине волны λ от его значения при λ_0 : $n_\lambda = n_0 + \beta(\lambda - \lambda_0)$. Имеются два сорта прозрачного стекла с характеристиками $n_{01} \neq n_{02}$ и $\beta_1 \neq \beta_2$. Нужно изготовить линзы для очков, у которых отсутствовала бы хроматическая аберрация, т.е. оптическая сила не зависела бы от длины волны и равнялась α диоптриям. Причем со стороны, обращенной к глазу, линза очков должна быть вогнутой с радиусом кривизны R_0 , который выбирается примерно равным расстоянию от этой вогнутой поверхности (когда очки используются по назначению) до точки, вокруг которой глаз вращается.

Естественно предложить комбинацию из двух тонких линз, сделанных из разных сортов стекол, склеенных между собой прозрачным клеем. При таком решении нужно подобрать радиусы кривизны этих двух линз, чтобы одновременно выполнялись такие два условия:

$$(n_{01} - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + (n_{02} - 1) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_0} \right) = \alpha,$$

$$\beta_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \beta_2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_0} \right) = 0.$$

В.Стеклов

Ф2234. Пучок быстрых (но нерелятивистских) нейтронов пересекает пучок медленно движущихся атомов водорода. При какой минимальной энергии нейтронов атомы водорода могут быть ионизованы? Столкновения протонов и нейтронов считайте абсолютно упругими.

До удара атом водорода находился в основном состоянии, поэтому выполнялось такое условие: кинетическая энергия движения электрона $p^2/(2m_e)$ была равна его энергии ионизации, т.е. 13,6 эВ, где p – величина импульса электрона, а m_e – масса электрона. При этом потенциальная энергия электрического взаимодействия в атоме была равна $-27,2$ эВ. После лобовых столкновений нейтрона и протона они обмениваются скоростями, так как их массы m_n и m_p близки друг к другу. Скорость v движения нейтрона при скоростях, значительно меньших скорости света, связана с его кинетической энергией E_k соотношением $v = \sqrt{(2E_k/m_n)}$. Если время удара нейтрона и протона можно считать малым, то, в соответствии с законами микромира, неопределенность импульса электрона, находящегося возле протона в области размера радиуса атома $r \sim 0,5 \cdot 10^{-10}$ м, составит величину $\Delta p = p = \hbar/r$, где $\hbar$ – постоянная Планка. Классически это можно интерпретировать так: в момент удара скорость электрона, равная по величине p/m_e , могла быть направле-

на произвольным образом по отношению к вектору $\vec{v}$. Другими словами, относительно новой системы отсчета, которую можно связать с пришедшим в движение протоном, «его» электрон имеет скорость в диапазоне величин $v \pm \Delta p/m$ и находится на расстоянии r от протона. Чтобы произошла ионизация, кинетической энергии электрона должно хватить, чтобы улететь от протона далеко и не вернуться, т.е. его кинетическая энергия в новой системе отсчета должна стать как минимум вдвое больше, а именно 27,2 эВ. При самых благоприятных (вероятных) обстоятельствах скорость электрона равна $v + p/m_e$, тогда его кинетическая энергия будет в два раза больше, если выполнено условие $v = (\sqrt{2} - 1)p/m_e$. Отсюда находим минимальную энергию нейтронов:

$$E_k = \frac{m_n v^2}{2} = \frac{13,6 \text{ эВ} \cdot (\sqrt{2} - 1)^2 m_n}{m_e} \approx 4,3 \text{ кэВ}.$$

А.Томов

Задачи

1. Саша и Валя купили на двоих велосипед. Саша внес 2000 рублей, а Валя — 3000 рублей. (Саша остался должен Вале.) Потом они продали велосипед за 4000 рублей. Как им поделить деньги по-честному, если мальчики катались на велосипеде одинаковое время?

А.Ковальджи



2. Вася вырезал из бумаги многоугольник, а Петя разрезал его на треугольник и четырехугольник. Сколько сторон могло быть в Васином многоугольнике?

И.Раскина



3. В классе учатся рыцари и лжецы, всего 25 учеников. Первый ученик сказал: «Среди моих друзей-одноклассников рыцарей на 1 больше, чем лжецов». Второй сказал: «Среди моих друзей-одноклассников

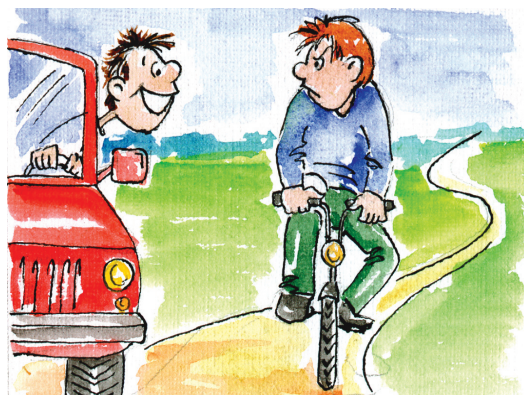


рыцарей на 2 больше, чем лжецов». И так далее, вплоть до двадцать пятого ученика, который сказал: «Среди моих друзей-одноклассников рыцарей на 25 больше, чем лжецов». Сколько лжецов учатся в этом классе?

А.Шаповалов

4. Из пунктов *A* и *B* навстречу друг другу одновременно выезжают велосипедисты Алеша и Боря и едут с одинаковыми постоянными скоростями. Через некоторое время из пункта *A* в пункт *B* на автомобиле с постоянной скоростью выезжает Вася. Через 20 минут он догоняет Алешу, еще через 20 минут встречает Борю, а еще через 25 минут приезжает в пункт *B*. Во сколько раз скорость автомобиля превышает скорость велосипедистов?

Б. Френкин



5. Есть четыре яблока разных масс и чашечные весы без гирь. Можно ли найти яблоко, чья масса ближе всего к средней массе всех яблок?

А. Шаповалов



Иллюстрации Д.Гришуковой

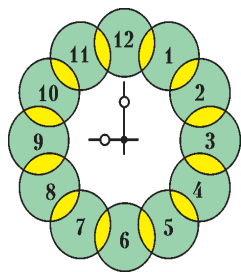
Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» или по электронному адресу: math@kvantjournal.ru (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

6. В стране Анчурии два политических деятеля решили править этой страной бессменно в течение 20 президентских сроков. По конституции этой страны нельзя быть президентом более двух сроков подряд. Сколькими способами они могут составить расписание, в какой последовательности им править?

А. Эвнин



7. Вокруг каждого числа циферблата описаны равные пересекающиеся окружности. Пересекаясь, соседние окружности образуют «линзы». Можно ли пронумеровать их числами от 13 до 24 так, чтобы суммы трех чисел в каждой из двенадцати окружностей были равны?

Н. Авилов

8. Петя взял три числа a , b , c (не обязательно положительных) и составил по ним три дроби $\frac{a}{b+c}$, $\frac{b}{c+a}$ и $\frac{c}{a+b}$. Оказалось, что эти три дроби равны одному и тому же числу x . Найдите x (укажите все варианты).

Фольклор

9. По краю круглого новогоднего торта расположены кремовые розочки — 10 красных и 10 зеленых. Докажите, что можно одним прямолинейным разрезом разделить торт на два куска так, чтобы в каждом куске было поровну красных и зеленых розочек.

Н. Долбиллин

10. Прямая проходит через середины диагоналей выпуклого четырехугольника и делит его площадь пополам. Докажите, что какая-то из этих диагоналей проходит через середину другой диагонали.

В. Произволов

Древняя наука и «Таинственный остров»

А. ЖУКОВ

МИСТЕР БРАУН, ЭТО ПРАВДА, ЧТО ВЫ БЫЛИ ОДНИМ из аэронавтов, об удивительных приключениях которых рассказал Жюль Верн в романе «Таинственный остров»?

В почитаемом и уважаемом преподавателе черокского колледжа трудно было узнать самого юного героя романа знаменитого писателя, но это был именно он – Герберт Браун, наравне со взрослыми ока-

завшийся в пору весеннего равноденствия 1865 года на необитаемом острове в необозримых просторах Тихого океана. Мистер Браун на миг прикрыл глаза, и в памяти, как наяву, всплыла картина бушующего океана: свирепые волны и аэростат, обреченно снижающийся к ревущей пучине.

«И тогда раздался мужественный голос – голос человека смелого, чье сердце не ведает страха. На оклик его ответили голоса не менее решительные.

– Все выбросили?

– Нет. Осталось золото – десять тысяч франков!

И тотчас тяжелый мешок полетел в океан.

– Поднялся шар?

– Чуть-чуть. Сейчас опять упадет!

– Что еще можно выбросить?

– Ничего!

– Ничего? А гондола?

– Цепляйтесь за сетку. А гондолу в воду!» [1]

– Да, – сказал мистер Браун, – волею providения мне посчастливилось испытать невероятные приключения в компании мужественных и отважных людей. Неистощимая энергия, трудолюбие и сила воли инженера Сайруса Смита, журналиста Гедона Спилета, Наба, моряка Пенкрофа помогли нам не только выстоять под ударами грозных сил стихии, но и создать на необитаемом острове настоящую колонию. Мы построили мосты, каналы, плотины и даже – сейчас в это трудно поверить! – электрический телеграф. Нам пришлось проделать как бы заново весь путь, пройденный человечеством: начать с изготовления примитивных орудий труда и добычи огня, а кончить довольно сложными механизмами.

– Мы читали! – похвастался мальчик с передней парты. – У инженера Сайруса Смита была поистине золотая голова.

– И золотые руки! – поддержали остальные дети.

– Да, – закивал сединой мистер Браун. – В свое время я учился у профессоров Бостона, но лучшего учителя, чем Сайрус Смит, мне встречать не доводилось. Это был настоящий инженер, ученый, человек энциклопедических знаний. Как сейчас помню: близится прекрасная тихая ночь. На горизонте, резко разграничивая море и небо, серебрится нежное бледное сияние – лунная заря. Сайрус Смит сосредоточенно направляет один конец самодельного деревянного циркуля на линию горизонта, а другой – на альфу Южного Креста.

– Мистер Браун, вы сейчас вспомнили, как Сайрус Смит определял координаты острова?

– Да-да, координаты острова...

– Мистер Браун, пожалуйста, расскажите об этом подробнее!

– С превеликим удовольствием. Неизвестно, какие сюрпризы готовит судьба каждому из вас, и я был бы счастлив, если бы наш опыт кому-то сослужил добрую службу.

Ориентируясь на местности, прежде всего нужно грубо, приблизительно оценить свое местоположение. Мы знали, что ураганный ветер, дующий с северо-востока, мог забросить наш шар в акваторию Тихого океана...

– А созвездия южного неба: Южный Крест, Скорпион, Рыбы, Звездный треугольник свидетельствовали о том, что вы попали в южную часть Тихого океана!...

– Совершенно верно. Но Тихий океан велик. Где же конкретно мы оказались – в пустынных его местах или же вблизи обитаемых берегов? Ответ на этот вопрос помог бы решить следующий – что важнее было бы делать в нашем положении: строить надежный дом или хороший корабль? Вот почему Сайрус Смит взялся определить координаты острова – его широту и долготу.

Как вы знаете, в географии долгота отсчитывается к востоку и к западу от Гринвичского меридиана от 0° до 180° . В первом случае долгота называется восточной, во втором – западной. Отправляясь, скажем, от Вашингтонского меридиана и равномерно перемещаясь на запад, мы равномерно будем увеличивать свою западную долготу. Можете ли вы назвать объекты, которые равномерно и постоянно, изо дня в день, из года в год перемещаются к западу?

– Это звезды!

– Это солнце!

– Они перемещаются к западу по небосводу!

– Замечательно! В чем еще, кроме угловой меры, можно измерить это перемещение?

– Солнечной тенью!

– Солнечными часами!

– Временем!

– Превосходно! Итак, между временем и долготой существует некоторая связь. В самом деле, Земля за 24 часа совершает один оборот вокруг своей оси. Следовательно, за один час земной шар поворачивается на 15° . Зная разницу в часах Δt между местным временем на начальном, скажем, Вашингтонском меридиане и местным временем на меридиане точки наблюдения к западу от Вашингтона, мы можем перевести эту разность в градусы долготы по формуле

$$\lambda = \lambda_0 + 15\Delta t, \quad (*)$$

здесь λ_0 – западная долгота Вашингтона, а λ – западная долгота точки наблюдения (промежутков времени Δt , конечно, предполагается не очень большим, чтобы значение λ укладывалось в пределы от 0° до 180° ; впрочем, это ограничение несложно обойти). Таким образом, основная трудность в определении долготы острова Линкольна (вы, наверное, помните, что свой остров мы назвали в честь благороднейшего гражданина Американской республики) свелась к определению разности в часах местного времени Δt .

– Мистер Браун, но ведь у Гедона Спилета в момент катастрофы с воздушным шаром уцелели часы!

– Верно. Более того – по чистой случайности его часы совершенно не пострадали и продолжали показывать местное время на меридиане Вашингтона. Часы у него были с превосходным механизмом, и журналист по настоянию Сайруса Смита заводил их ежедневно, не переводя стрелок, самым тщательным образом. Шестнадцатого апреля, производя наблюдения за длиной тени, отбрасываемой на песок воткнутой палочкой, инженер установил прохождение солнца через меридиан острова. Полдень на острове Линкольна случился в тот момент, когда в Вашингтоне уже было пять часов вечера. Зная западную долготу Вашингтона $\lambda_0 \approx 77^\circ$ и подставив в формулу (*) значение $\Delta t = 5$ часов, Сайрус Смит оценил долготу острова: $\lambda \approx 152^\circ$ западной долготы. А учитывая вероятные ошибки в наблюдении, Сайрус Смит счел возможным сообщить товарищам, что остров лежит между сто пятидесятым и сто пятьдесят пятым меридианами к западу от Гринвича.

– Мистер Браун, а почему Сайрус Смит проводил

свои наблюдения не сразу, прибыв на остров, а лишь спустя месяц? Ведь это оказалось так просто!

– Просто? Хм... Все действительно было бы просто, если бы солнце по небосводу перемещалось равномерно.

– Как? Неужели оно движется неравномерно?

– Видите ли, человеческий глаз – не лучший, хотя и полезный инструмент для астрономических наблюдений. Доказано, что солнце путь свой над нами держит неравномерно. Причин здесь несколько – и наклон земной оси вращения к плоскости орбиты, и отличие этой орбиты от круговой, и неравномерность движения Земли по орбите... Чтобы получить среднее солнечное время, текущее равномерно, нужно к так называемому истинному солнечному времени, которое показывают обычные солнечные часы – тень от воткнутой в песок палочки, – добавить некоторую поправку. Величина этой временной поправки, например, в ноябре месяце может достигать шестнадцати минут. Кстати, какой ошибке в определении долготы соответствует эта поправка, если ее рассчитывать по формуле (*)?

– Четырем градусам.

– Вот видите, пренебрегать ею было бы неразумно. Лишь четыре раза в год поправка равна нулю – это бывает около 15 апреля, 14 июня, 1 сентября и 25 декабря.

– Почему «около»?

– Потому что год не содержит целого числа суток и указанные даты могут изменяться в пределах 1–2 дней.

– Мистер Браун, а как Сайрус Смит определял широту острова?

– Определение широты основано на так называемой теореме о высоте полюса мира. Для непосвященных это звучит несколько загадочно и торжественно, хотя сама теорема представляет собой довольно простой факт элементарной геометрии. Скажите, пожалуйста, кому-либо из вас доводилось фотографировать звездное небо, особенно в его северной части?

– Да, – поднялся рослый мальчик со среднего ряда.

– Я фотографировал. Если устанавливать большую выдержку, то на диапозитиве видны концентрические дуги различных радиусов, центр которых близок к Полярной звезде. Эти дуги – траектории звезд на небосводе.

– Замечательно, Роберт! – мистер Браун дружелюбно улыбнулся. – Несомненно, твой опыт удостоился бы высокой похвалы Сайруса Смита. Действительно, на небосводе можно обнаружить неподвижную точку, вокруг которой, как нам кажется, движутся звезды. Эта точка называется северным полюсом мира. Точно так же, если фотографировать небо в южном полушарии, можно выделить точку, называемую южным полюсом мира. Прямая, соединяющая полюс мира с точкой наблюдения, в астрономии получила название оси мира. Древние полагали, что все звезды укреплены на прозрачной хрустальной сфере, которая медленно вращается вокруг оси мира, завершая полный оборот за сутки.

– Мистер Браун, но ведь у разных наблюдателей будут получаться разные оси мира?

– Действительно, это так. Но, где бы ни находился наблюдатель, его ось мира будет параллельной оси вращения Земли. Понять это легче всего, представив себе звездный купол в виде большой хрустальной сферы, которую воображали древние вокруг нашей планеты. Точка, в которой пересекает сферу земная ось вращения, по мере увеличения радиуса сферы будет удаляться в бескрайние просторы вселенной, в бесконечность, и по мере этого удаления ось мира земного наблюдателя будет все больше приближаться к прямой, параллельной оси вращения Земли. Кстати, огромные космические расстояния по сравнению с земными позволяют говорить и о практической параллельности лучей звезды, достигающих различных точек земной поверхности.

А теперь ответьте, пожалуйста, на такой вопрос. Если мы, выйдя из Чероки, направимся по меридиану строго на север, что будет происходить с северным полюсом мира?

– Он будет подниматься все выше и выше над горизонтом.

– Угол, который составляет ось мира с плоскостью горизонта, в астрономии называют высотой полюса мира.

– Ага, получается, что высота полюса мира пропорциональна географической широте точки наблюдения!

– Здесь уместно говорить не только о пропорциональности, но и о равенстве. Посмотрите на рисунок 1, на котором изображен земной шар. Высота полюса мира и географическая широта точки наблюдения являются углами с взаимно перпендикулярными сторонами, следовательно, эти углы равны.

– Все ясно! Сайрус Смит определил высоту южного полюса мира.

– Да, и в этом ему помогли некоторые сведения из астрономии. У Роберта хорошая наблюдательность – фотографируя звездное небо, он заметил, что северный полюс мира находится вблизи Полярной звезды. Угловое расстояние между ними примерно 1° , так что Полярная звезда может служить хорошим маяком путешественникам. Несколько сложнее ориентироваться в южном полушарии – вблизи южного полюса мира нет такой яркой звезды, как Полярная.

– Сайрус Смит ориентировался по звезде Альфа Южного Креста.

– Совершенно верно. Немногие помнят, что альфа Южного Креста отстоит от полюса на угловом удалении примерно 27° , но Сайрус Смит это знал. Он измерил угол возвышения этой звезды над горизонтом в момент ее так называемой нижней кульминации – при

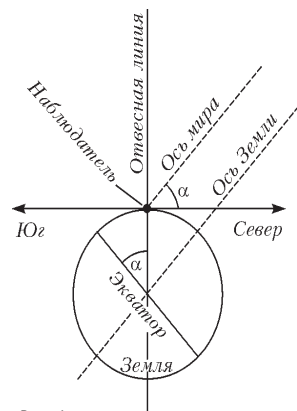


Рис. 1

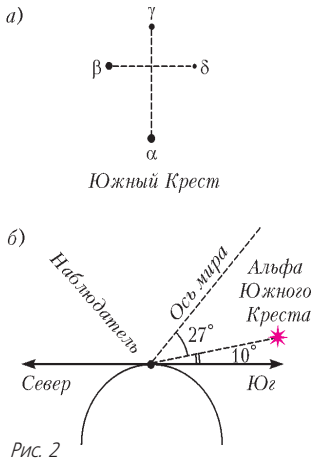


Рис. 2

прохождении ее через меридиан острова, когда Южный Крест предстал перед наблюдателем как бы вверх ногами (рис.2). Этот угол оказался равным 10° , что дает значение высоты южного полюса мира, а следовательно, и широты острова: $10^\circ + 27^\circ = 37^\circ$.

– Мистер Браун, но ведь Сайрус Смит производил свои наблюдения на высо-

ком плато. Неужели поправка на высоту этого плато оказалась несущественной?

– Сайрус Смит для своих наблюдений избрал плато Кругозора лишь потому, что на близлежащем и доступном берегу моря мыс Коготь закрывал южную сторону горизонта. Жюль Верн довольно подробно описал, как инженеру удалось с помощью теоремы о подобных треугольниках оценить высоту плато Кругозора – я на этом останавливаться не буду. Напомню лишь, что высота H плато оказалась равной 100 метрам. У подножия плато горизонт другой, чем на самом плато, поэтому следует рассмотреть угловую поправку ϵ , учитывающую это отличие (рис.3). Опять же воспользовавшись свойством углов со взаимно перпендикулярными сторонами, находим, что эта поправка равна углу между двумя земными радиусами, проведенными в точку касания с Землей горизонта плато и в точку подножия плато. Из прямоугольного треугольника с известной гипотенузой $R + H$ и катетом R находим косинус угла между ними: $\cos \epsilon = \frac{R}{R + H}$. Поскольку

величина среднего радиуса Земли $R = 6371004$ м, а высота плато $H = 100$ м, то отсюда $\epsilon \approx 0,32^\circ$ – поправка, действительно, несущественная.

– Но, мистер Браун, как же Сайрус Смит мог получить такое ничтожно малое значение угла ϵ , ведь у него же не было специальных таблиц?

– Здесь нет ничего удивительного. Таблицы ведь тоже появились не сами по себе – в свое время их кто-

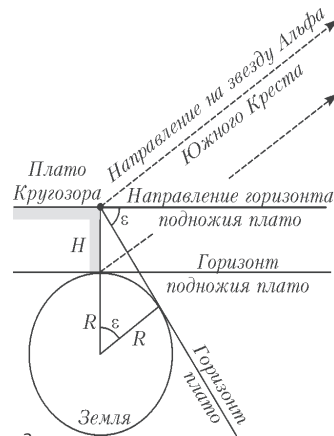


Рис. 3

то составлял, а для этого проводил необходимые расчеты. Для небольших значений произвольного угла x , выраженного в радианах, существует приближенная

зависимость $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$. В нашем случае имеем

$$1 - \frac{\epsilon^2}{2} \approx \frac{R}{R + H}, \text{ откуда } \epsilon \approx \sqrt{\frac{2H}{R + H}} \approx 0,0056028 \text{ ради-}$$

ана, что составляет $0,32^\circ$. Как видите, при надлежащих знаниях и умениях можно выпутаться из многих затруднительных положений.

Я хочу еще обратить ваше внимание на то, что Сайрусу Смигу в его изысканиях ассистировали геометрия, астрономия, арифметика – составные части древней науки математики, как ее представляли последователи древнегреческого ученого Пифагора (VI в. до н.э.), включая в нее еще и музыку. Все эти четыре раздела пифагорейцы объединяли одним словом – математика.

Литература

1. Жюль Верн. Таинственный остров. – М.: Детская литература, 1980.
2. Зигель Ф.Ю. Сокровища звездного неба. Путеводитель по звездам и Луне. – М.: Наука, 1986.
3. Михайлов А.А. Земля и ее вращение. – М.: Наука, 1984. (Библиотечка «Квант», вып.35.)
4. Волошинов А.В. Пифагор: союз истины, добра и красоты. – М.: Просвещение, 1993.

Задача для мистера Холмса

А.ЖУКОВ

О Х, МИСТЕР ХОЛМС, – ДОКТОР ВАТСОН ПОТЯС в воздухе бумажкой, испещренной многочисленными знаками. – Я всегда удивлялся вашей необычно-

венной способности находить решения в самых, казалось бы, безвыходных ситуациях, но боюсь, что в данном случае все ваше волшебное искусство окажется бессильным.

Опубликовано в «Кванте» №2 за 1999 год.

– Мой дорогой Ватсон, – Холмс не спеша отвел в

сторону трубку и выпустил сизое колючко дыма, – право же, не стоит впадать в излишнее возбуждение от пустякового ребуса, в котором вместо букв следует подобрать всего лишь парочку-другую цифр из ограниченного набора. Жизнь нам преподносит гораздо более содержательные загадки, достойные сопереживания и беспокойства истинного джентльмена.

– Но, Холмс, здесь встречаются не только буквы, но и звездочки! Впрочем, вы опять меня поражаете – как же вы догадались, что речь идет именно о числовом ребусе?

– Это элементарно, Ватсон. Вы же целый час сосредоточенно читаете журнал «Квант», на странице которого помещен предмет вашего пристального внимания, а именно: расшифровать пример на умножение

$$\begin{array}{r} \times \quad * * * * * \\ \hline \quad OX \\ \hline AX \end{array}$$

И что же в этом примере – прямо скажем, для младших школьников – вызвало у вас столь непреодолимые трудности?

– Видите ли, Холмс, в ребусе на месте звездочек могут стоять произвольные ненулевые цифры. Мне ли вам объяснять, что в данном случае мы сталкиваемся с задачей огромного числового перебора? Похоже, здесь нужно рассмотреть в общей сложности где-то около полумиллиарда вариантов. Бедные детишки!

– Хм, Ватсон, кто много перебирает, тот мало думает.

– Холмс окупал себя еще одной порцией табачного дыма. – Совсем нет необходимости рассматривать все мыслимые варианты. Например, со всей определенностью можно утверждать, что двухзначное число OX (буква O кодирует цифру десятков, а буква X – цифру единиц) кратно числу 32.

– Холмс, вы хотите сказать, что число OX может принимать всего лишь одно из трех значений: 32, 64 и 96? Простите, но я не пойму, на чем основана столь смелая догадка.

– Это не догадка, а непреложный математический факт. Запишем первый множитель в виде $a + 10^{-5} \cdot B$, где a – ненулевая цифра, а B – целое пятизначное число. Из условия задачи следует, что среди делителей B не могут одновременно присутствовать цифры 2 и 5. Несложно догадаться, что число B должно быть нечетным, тогда число OX должно делиться на $2^5 = 32$.

– В таком случае число B должно быть кратно $5^5 = 3125$.

– Браво, Ватсон. Ваше утверждение я бы сформулировал несколько точнее: $B = 3125 \cdot k$, где k – некий нечетный множитель. Кстати, что следует из того, что B – число пятизначное?

– Это условие накладывает дополнительные ограничения на множитель k . В частности, поскольку $3125 \cdot 3 < 10^4$ и $3125 \cdot 4 > 10^4$, то $k > 4$.

– Теперь вам должно быть понятно, почему ненулевая цифра a в первом множителе меньше тройки.

– А что, это действительно так?

– Посудите сами, Ватсон:

$$OX \cdot (a + 10^{-5} \cdot B) \geq 2^5 (a + 10^{-5} \cdot 5^5 \cdot k) = 32a + k.$$

При $k > 4$ последнее выражение может быть двухзначным числом лишь когда $a = 1$ или $a = 2$.

– Ох, это великолепно, Холмс! Я думаю, что с дальнейшим перебором уже несложно справиться в течение одного вечера.

– Если только вам нечем заняться, Ватсон. Вечернее время все же лучше посвящать более содержательным занятиям.

– Чем решать головоломки?

– Чем осуществлять бездумный перебор.

– Холмс, неужели вам еще что-то известно о числах этого ребуса?

– Да. Например, число OX равно в точности 64.

– Хм, вполне может быть, но, по правде говоря, я не представляю, на основании чего сделан такой вывод.

– Что вы можете сказать о четности числа AX ?

– Сейчас подумаю. Оно заканчивается цифрой X , которая может быть либо 2, либо 4, либо 6 (как последняя цифра числа OX). Следовательно, AX – число четное.

– А теперь заметьте, что произведение $OX \cdot (a + 10^{-5} \cdot B)$ в случае $OX = 32$ равно $32a + k$, а в случае $OX = 96$ равно $96 + 3k$. И в том, и в другом случае при нечетном k результат получается...

– Нечетным! Следовательно, ни один из этих случаев не подходит. Ох, Холмс!

– Может быть, вы теперь скажете, чему равна цифра a ?

– Попробую:

$$OX \cdot (a + 10^{-5} \cdot B) = 64a + 2k.$$

Ну конечно же, a не может равняться 2, поскольку иначе в ответе получилось бы трехзначное число. Итак, цифра a может быть равной только единице.

– Ну, и какие же варианты вам теперь осталось рассмотреть? Обратите внимание на то, что число AX должно быть не меньше, чем число OX .

– AX может быть равно либо 74, либо 84, либо 94. Поскольку $AX = 64 + 2k$, то в каждом из этих трех случаев соответственно получаем $k = 5$, либо $k = 10$ (невозможно, так как k должно быть нечетным), либо $k = 15$. Итак, всего возможно два решения: $1,15625 \cdot 64 = 74$ и $1,46875 \cdot 64 = 94$. Ах, Холмс! Я не могу удержаться, чтобы не употребить слова ребуса для оценки вашего метода. Это действительно великолепно!

– Благодарю вас, Ватсон. А я, с вашего позволения, не могу удержаться, чтобы не употребить освободившееся вечернее время для игры на любимом музыкальном инструменте. Будьте добры, подайте мне, пожалуйста, футляр со скрипкой.

Все перемены, в натуре случающиеся, такого суть состояния, что сколько чего у одного тела отнимется, столько присовокупится к другому... Сей всеобщий естественный закон простирается и в самые правила движения: ибо тело, движущее своею силою другое, столько же оныя у себя теряет, сколько сообщает другому, которое от него движения получает.

...теплота состоит во внутреннем движении материи.

Ударив по ртутной пуле после того обухом, почувствовал я, что она имеет твердость, как свинец или олово.

*Коль много микроскоп нам тайностей открыл
Невидимых частиц и тонких в теле жил!*

Тотчас я, торжествуя, взял плоское зеркало и линзу диаметром в два дюйма и, так как день был как раз ясный, собрал линзой солнечные лучи, отраженные зеркалом. Когда, после этого, я подставил кусок дерева, на нем образовалось черное пятно и оттуда пошел дым.

Возбужденная электрическая сила в шаре, из которого воздух вытянут, внезапные лучи испускает...так что беспрерывное блистание быть кажется. В северном сиянии всполохи или лучи вид подобный имеют.

Натура тем паче всего удивительна, что в простоте своей многохитрозна, и от малого числа причин производит неисчислимые образы свойств, перемен и явлений.

Михаил Ломоносов

А так ли хорошо знаком вам Михаил Васильевич Ломоносов?

Мы впервые посвящаем весь выпуск рубрики «Калейдоскоп «Кванта» одному персонажу — но он более чем достойный претендент на такое внимание. И не только из-за того, что наступил его славный трехсотлетний юбилей, но и потому, что более подходящего кандидата на роль героя «Калейдоскопа», пожалуй, не сыскать. Отражение многогранного таланта нашего великого соотечественника в его изречениях, в любопытных и поучительных эпизодах его судьбы, в будто бы простых, но не потерявших актуальности занимавших его вопросах вы найдете сегодня в россыпи фрагментов, из которых мы попытались сложить своеобразную мозаику (одно из увлечений Ломоносова!).

Многократно появляясь в «Калейдоскопе», Михаил Васильевич близок ему еще и тем, что придавал большое значение качественному подходу к изучаемым явлениям, а именно такие задачи мы и коллекционируем.

Итак, последуем же за тем, кто, как назвал его Пушкин, «сам был первым нашим университетом».

Вопросы и задачи

1. В записях Ломоносова имеется такая заметка: если «на не очень большом расстоянии различие силы тяжести было бы велико, то можно было бы построить неверные весы». Как вы думаете, о каких весах здесь идет речь?

2. Хотя Ломоносов с помощью сконструированного им маятника на практике и исследовал земное притяжение, однако в теории дальнедействующее («без посредников») тяготение считал несовместимым с законом сохранения материи и движения. Что же мешало ему обнаружить «действие на расстоянии»? Например, как объяснить, почему находящиеся в комнате предметы не приближаются друг к другу?

3. Еще в юности, рыбача с отцом, Ломоносов замечал, что при попытке сойти на берег с причалившей к нему

носом, но не закрепленной лодки рыбаки заставляли ее двигаться назад. Отчего?

4. Формулируя открытый им закон сохранения материи и движения, Ломоносов проверял его с помощью «подручных средств» — например, сталкивал скользящие по паркету стулья. Как вы считаете, когда покоящееся тело приобретет большую скорость от такого же движущегося тела: при упругом или неупругом центральном ударе?

5. Во времена Ломоносова уже пользовались как ртутным, так и спиртовым термометром. Какой из них более чувствительный при прочих равных условиях?

6. В термометрической шкале Делиля температура кипения воды соответствовала нулю, а температура таяния льда — 150 градусам. Какие «здоровомыслящие» изменения внес в эту шкалу Ломоносов, если и в его шкале сохранилась та же «цена деления»?

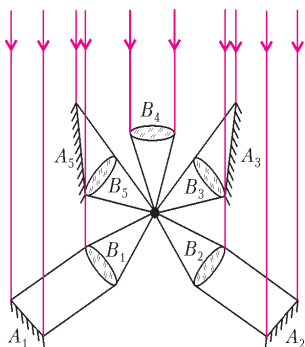
7. Ломоносов самостоятельно изобретал и строил метеорологические приборы для наблюдения за различными параметрами атмосферы, прежде всего за давлением и температурой. А как, по-вашему, изменится разность показаний сухого и влажного термометров при понижении температуры воздуха, если абсолютная влажность останется без изменений?

8. Объясните такой опыт, проведенный Ломоносовым: «Через листовой свинец, сложенный и согнутый в виде сифона и погруженный одним концом в ртуть, ртуть удаляется из сосуда в течение 24 часов».

9. Почему Ломоносов жаловался на растекание чернил при письме на бумаге плохого качества?

10. После опытов Франклина, Рихмана и Ломоносова, который «чинил электрические воздушные наблюдения с немалой опасностью», молниеотводы, устанавливаемые на зданиях, стали заземлять. А вот почему на верхнем их конце закрепляют острие, а не закругленный проводник?

11. Ломоносов доказывал, что телескоп не только увеличивает видимые размеры далеких предметов, но также усиливает и количество света, воспринимаемого глазом, что действительно оказалось верным для точечных источников света. Как это можно объяснить?



зеркала, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 — собирающие линзы, четыре из которых составляют с направлением первичного пучка углы в 45° . Под какими углами к этому пучку надо располагать зеркала?

13. При переходе света из воздуха в любое твердое или жидкое прозрачное вещество окраска света остается прежней. Как это можно было объяснить во времена Ломоносова?

14. Когда серп Венеры очень тонок, его рога охватывают больше половины диска, а в некоторых случаях вокруг всего диска наблюдается тонкое светящееся кольцо. Какое из астрономических открытий Ломоносова поможет в понимании этого явления?

Микропыт

Основой, питающей деятельность человеческого разума, Ломоносов считал наблюдение и опыт. Например, проводя метеорологические исследования, он обратил внимание, что ночью при густой облачности не бывает росы. Как вы можете это объяснить?

Любопытно, что

...Ломоносов убежденно отстаивал представления об атомах («элементах») и молекулах («корпускулах»). Учение о прерывистом (зернистом) строении материи было для него ключом для объяснения многообразных явлений — теплопередачи, упругих свойств воздуха, агрегатных состояний тел и т.д.

...борясь с представлением о теплороде, как специфической жидкости, якобы переливаемой в нагреваемые тела, Ломоносов фактически ввел понятие абсолютного нуля температур — «наибольшей и последней степени холода», когда полностью прекращается движение составляющих материю частиц.

...исключительно высокая экспериментальная техника Ломоносова подтверждается точностью, с которой он калибровал свои приборы, например ртутные термометры. С их помощью он сумел определить коэффициент расширения газов при нагревании, сделав ошибку меньше 3%, что было в десять раз точнее принятого в ту пору значения.

...в 1760 году Ломоносов дал первое изображение плотнейшей кубической шаровой упаковки и объяснил

форму кристаллических многогранников, заложив, тем самым, основы физической кристаллографии.

...большая часть конкретных химических исследований Ломоносова была связана с технологией получения и окраски мозаичных стекол, из которых сам ученый выкладывал картины. За одну из них — «Полтавский бой», признанную шедевром мозаичного искусства, Ломоносов был избран Болонской академией наук своим почетным членом.

...покровитель Ломоносова граф И.И.Шувалов не слишком разбирался в естественных науках и вряд ли их ценил. Он считал, что призвание Ломоносова — быть историком и поэтом. Так, за одну из своих хвалебных од Ломоносову досталось от царицы 2000 рублей, что было больше, чем его трехлетнее жалование в Академии наук.

...Ломоносов был одним из первых исследователей полярных сияний, полагая, что это явление сродни свечению газового разряда. Также он указывал на то, что молния это не что иное как гигантская искра, ничем, кроме размеров, не отличающаяся от искры между шарами электрической машины.

...«ничто так не поучительно, как заблуждение гения». А Ломоносов не раз крупно заблуждался. Помимо того что он был противником ньютоновской концепции дальнего действия гравитационных сил, он капитально ошибался в вопросах о характере внутреннего движения молекул, о пропорциональности веса и массы, о возможности замерзания морской воды и о природе свечения кометных хвостов.

...Ломоносову принадлежит ряд верных соображений о противоречиях между корпускулярной теорией света и опытом; как активный сторонник волновой теории, он был близок к мысли о поперечности световых волн и пришел к правильному выводу о связи между поглощающей и испускающей способностями тела.

...Ломоносовым был модифицирован телескоп Ньютона, а также сконструирована «ночезрительная труба», предназначенная для рассматривания предметов в условиях слабой освещенности — ночью или в сумерках. Эта труба, названная ученым «машиной для сгущения света», предвосхищала появление светосильной оптики, позволяющая увеличить угол зрения до пределов, при которых глаз может еще различить две точки объекта как отдельные.

...наблюдения за прохождением Венеры по диску Солнца в 1761 году стали фактически первым международным научным проектом — в них участвовали более ста астрономов из разных стран. Ломоносову удалось не только заметить тонкие оптические эффекты, но и правильно объяснить их причину, заключающуюся в наличии атмосферы, окружающей эту планету.

Что читать в «Кванте» о М.В.Ломоносове

(публикации последних лет)

1. Калейдоскоп «Кванта» — 2004, №3, с. 32; 2007, №1, с. 32; 2008, №1, с. 32; 2010, №5, с. 32;
2. «Московский университет» — 2005, №3, с. 15;
3. «Метеорологические наблюдения: распределенные в пространстве и во времени» — 2010, №3, с. 2;
4. «Человек-университет» — 2011, №5–6, с. 2.

Публикацию подготовил А.Леонич

Графический способ решения одной физической задачи

Д.БЕШИМБАЙ, О.КОНАКБАЕВ

В ДЕВЯТОМ НОМЕРЕ ЖУРНАЛА «КВАНТ» ЗА 1987 ГОД В разделе «Задачник «Кванта» была опубликована задача Ф1075. Вот ее условие:

Выполняя лабораторную работу, студент опустил в сосуд с водой кипятильник, включил его в сеть и стал каждые три минуты записывать температуру. Данные этого опыта приведены в таблице 1. Затем он охладил воду, положил в сосуд небольшой металлический образец и вновь провел измерения. Результаты этого опыта приведены в таблице 2. Определите по этим данным теплоемкость образца. Напряжение в сети $U = 35\text{ В}$, ток через кипятильник $I = 0,2\text{ А}$, температура в комнате $t_0 = 20^\circ\text{С}$.

Таблица 1

$t, ^\circ\text{С}$	25,2	26,4	27,6	28,7	29,7	30,6	31,5	32,3	33,1
---------------------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Таблица 2

$t, ^\circ\text{С}$	22,6	23,8	25,0	26,0	27,0	28,0	28,9	29,8	30,6
---------------------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

А в первом номере журнала за 1988 год можно ознакомиться с решением этой задачи, выполненным аналитическим

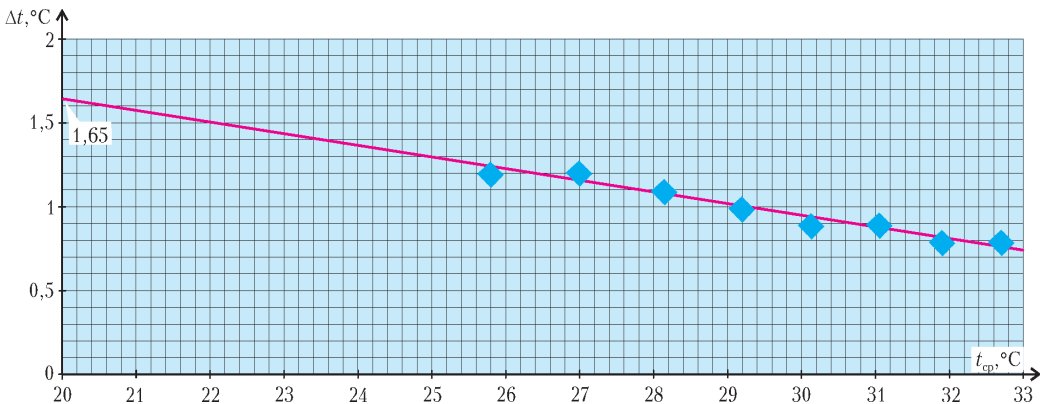


Рис. 1

способом. С помощью уравнения теплового баланса по данным таблицы 1 находится теплоемкость сосуда с водой, по данным таблицы 2 находится теплоемкость сосуда с водой и образцом и по разности этих теплоемкостей определяется теплоемкость образца. В конце решения автор предупреждает

читателей о том, что при расчетах допустим довольно значительный разброс результатов. Действительно, выбирая множество пар различных значений температуры, для теплоемкостей можно получить неожиданные результаты с большими разбросами.

Мы предлагаем графический способ решения данной задачи, который помогает наглядно и более точно определить значения теплоемкостей сосуда с водой и сосуда с водой и образцом.

Будем считать, что температура воды увеличивается равномерно за счет усиления теплоотдачи с ростом температуры. Чтобы учесть влияние теплоотдачи, проследим, как меняется приращение Δt температуры воды за каждые $\Delta \tau = 3$ мин работы нагревателя в зависимости от температуры воды, причем температуру будем считать как среднюю между ее значениями в начале и в конце каждого интервала времени. Построим на основе этого наблюдения следующую таблицу:

Таблица 3

$t_{\text{ср}}, ^\circ\text{С}$	25,8	27	28,15	29,2	30,15	31,05	31,9	32,7
$\Delta t, ^\circ\text{С}$	1,2	1,2	1,1	1,0	0,9	0,9	0,8	0,8

По точкам этой таблицы построим график зависимости Δt от $t_{\text{ср}}$ (рис.1). Как видно из графика, все точки хорошо ложатся на прямую, пересекающую ординату в точке $\Delta t = 1,65^\circ\text{С}$. Эта точка соответствует температуре воды $t = 20^\circ\text{С}$, равной температуре в комнате. Это означает, что при этих условиях теплоотдача воды в окружающую среду отсутствует. Тогда уравнение теплового баланса примет вид

$$IU\Delta\tau = C_{\text{в}}\Delta t.$$

Отсюда находим теплоемкость сосуда с водой:

$$C_{\text{в}} = \frac{IU\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{0,2 \text{ А} \cdot 35 \text{ В} \cdot 180 \text{ с}}{1,65 \text{ К}} \approx 764 \text{ Дж/К}.$$

Аналогичные наблюдения проведем по отношению к сосу-

ду с водой и металлическим образцом. На основе опыта получим следующую таблицу:

Таблица 4

$t_{\text{ср}}, ^\circ\text{С}$	23,2	24,4	25,5	26,5	27,5	28,45	29,35	30,2
$\Delta t, ^\circ\text{С}$	1,2	1,2	1,0	1,0	1,0	0,9	0,8	0,8

Авторы этой статьи Дастан Бешимбай и Олжас Конакбаев – ученики Интеллектуальной школы физико-математического направления города Семей (Республика Казахстан). (Прим. ред.)

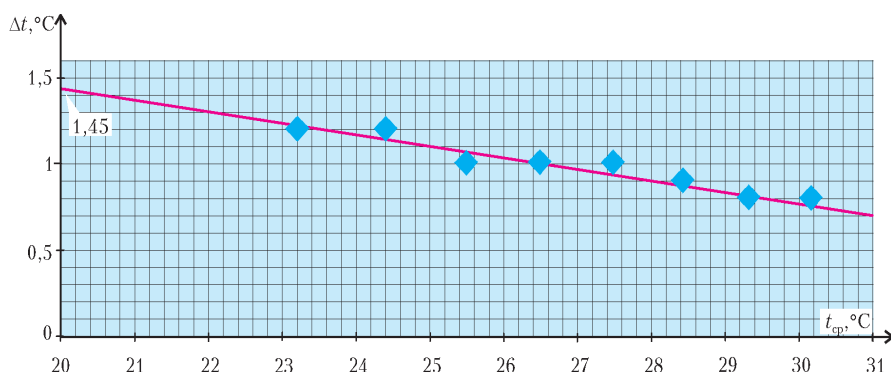


Рис. 2

Теперь построим соответствующий график зависимости Δt от t_{cp} (рис.2). Из графика видно, что при абсциссе $t = 20\text{ }^\circ\text{C}$ ордината равна $\Delta t = 1,45\text{ }^\circ\text{C}$. Запишем уравнение теплового баланса в виде

$$IU\Delta\tau = (C_b + C_{ог})\Delta t,$$

откуда найдем искомую теплоемкость образца:

$$C_{ог} = \frac{IU\Delta\tau}{\Delta t} - C_b = \frac{0,2\text{ A} \cdot 35\text{ В} \cdot 180\text{ с}}{1,45\text{ К}} - 764\text{ Дж/К} \approx 105\text{ Дж/К}.$$

Из графика, приведенного на рисунке 1, хорошо видно, что прямая, характеризующая зависимость между средней

температурой сосуда с водой и приращением их температуры, может пересекаться с абсциссой. Эта точка пересечения для сосуда с водой соответствует температуре $t_{cp} \approx 49,6\text{ }^\circ\text{C}$ (попытайтесь найти это значение самостоятельно). Известно, что с ростом температуры испарение идет более интенсивно, способствуя увеличению теплоотдачи. Если даже закон теплоотдачи не изменится, вода нагреется только до $49,6\text{ }^\circ\text{C}$, т.е. она никогда не закипит. Аналогично, во втором опыте (см. график, приведенный на рисунке 2) после достаточно долгого времени температура воды с образцом не превысит $41,6\text{ }^\circ\text{C}$, т.е. тоже никогда не закипит.

Расчет электроемкости конденсаторов

В.ЗВАРИЧ, В.ЛЯХОВЕЦ

КАК ИЗВЕСТНО, СУЩЕСТВУЮТ ДВА ПРОСТЕЙШИХ СОЕДИНЕНИЯ конденсаторов: последовательное и параллельное. Формулы для нахождения общей электроемкости конденсаторов в этих соединениях давно известны. Но что делать, если конденсаторы соединены не последовательно и не параллельно? Один из методов, которым предлагается решать такие задачи, это метод симметрии. Но его использовать можно не всегда. Встает вопрос: как определить общую электроемкость, а также заряды элементов системы конденсаторов в самом общем случае? Постараемся найти ответ на этот вопрос.

Начнем с простого: рассмотрим два последовательно соединенных конденсатора (рис.1). Очевидно, что при последовательном соединении заряды этих конденсаторов одинаковы. Пусть, например, $q_1 = q_2 = 5$ Кл. Чему равен суммарный заряд данной системы? На этот вопрос многие ответят так: $5 \text{ Кл} + 5 \text{ Кл} = 10 \text{ Кл}$. Но это неверно, потому что конденсатор состоит из двух параллельных пластин, разде-

ленных диэлектрической средой (например, воздухом). Это приводит к следующим интересным результатам (рис.2). Заряд от источника тока достигает крайней левой пластины первого конденсатора емкостью C_1 . Он не может пойти далее, так как цепь прерывается. Однако положительный заряд на крайней левой пластине удаляет положительный заряды из правой пластины этого же конденсатора (через индукцию), приводя к полному заряду $q_1 = 5$ Кл. Положительные заряды, удаленные из правой пластины первого конденсатора, отправляются через цепь на левую пластину второго конденсатора емкостью C_2 . Тем же самым способом удаляются положительные заряды из правой пластины, приводя к полному заряду $q_2 = 5$ Кл на конденсаторе емкостью C_2 . Таким образом, полный заряд системы равен $q = 5$ Кл.

Отсюда следует очень важное свойство: при последовательном соединении конденсаторов заряд между соседними пластинами двух конденсаторов равен нулю (рис.3).

Используем проведенные рассуждения для решения более сложных задач, где конденсаторы соединены произвольно. Это позволит нам определить заряд и напряжение каждого конденсатора независимо от способа соединения.

Рассмотрим соединение конденсаторов, представленное на рисунке 4. Суммарную электроемкость можно вычислить по

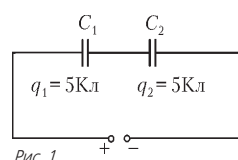


Рис. 1

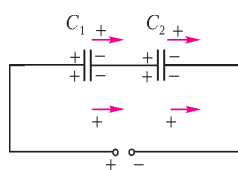


Рис. 2

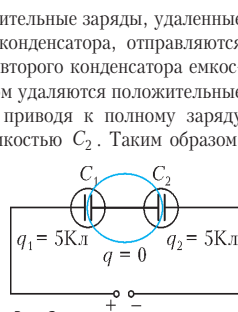


Рис. 3

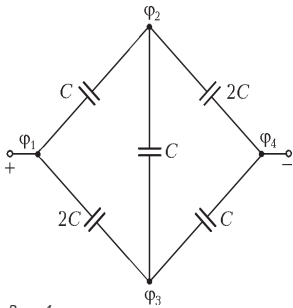


Рис. 4

На рисунке 5 области нулевого заряда между соседними конденсаторами обозначены голубым цветом. Полный заряд этой системы равняется полному заряду только двух конденсаторов, емкостями C и $2C$, которые являются самыми близкими к положительной клемме. Заряд прибывает на пластины только этих конденсаторов, а на остальных он перераспределяется, и никакие новые заряды не создаются в системе.

Чтобы продолжить решение, мы в произвольном порядке приписываем заряды всем конденсаторам, как показано на рисунке 6, и получаем следующую систему уравнений:

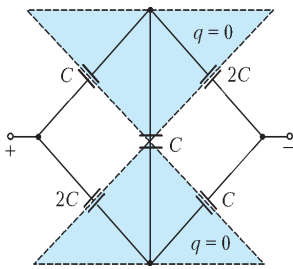


Рис. 5

Теперь, зная, что $\Phi_1 - \Phi_4 = U$, необходимо решить данную систему и найти q_1 и q_2 .

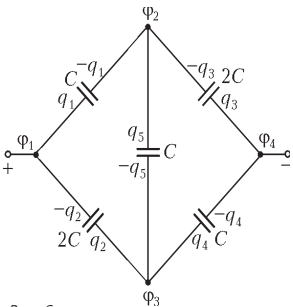


Рис. 6

Из уравнений 3 и 6, учитывая, что разность потенциалов $\Phi_1 - \Phi_4$ равна U , находим

$$U = \frac{q_1}{C} - \frac{q_3}{2C}.$$

Теперь объединим получившиеся три уравнения с первыми двумя уравнениями нашей исходной системы, выразим из них заряды q_3 , q_4 и q_5 через заряды q_1 и q_2 и получим

$$q_1 = \frac{3CU}{5}, \quad q_2 = -\frac{4CU}{5}.$$

формуле

$$C_{\text{общ}} = \frac{q_{\text{общ}}}{U},$$

где $q_{\text{общ}}$ – полный заряд и $U = \Phi_1 - \Phi_2$ – напряжение между клеммами. Проанализируем перераспределение заряда между конденсаторами и найдем области, где заряд между пластинами соседних конденсаторов равен нулю.

$$-q_1 - q_3 + q_5 = 0,$$

$$q_2 + q_4 - q_5 = 0,$$

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{q_1}{C},$$

$$\Phi_3 - \Phi_1 = \frac{q_2}{2C},$$

$$\Phi_2 - \Phi_3 = \frac{q_5}{C},$$

$$\Phi_4 - \Phi_2 = \frac{q_3}{2C},$$

$$\Phi_3 - \Phi_4 = \frac{q_4}{C}.$$

Складываем уравнения 3, 4, 5 и получаем

$$0 = \frac{q_2}{2C} + \frac{q_1}{C} + \frac{q_5}{C},$$

или

$$q_2 + 2q_1 + 2q_5 = 0.$$

Затем складываем уравнения 5, 6 и 7 и получаем

$$0 = \frac{q_4}{C} + \frac{q_5}{C} + \frac{q_3}{2C},$$

или

$$2q_5 + q_3 + 2q_4 = 0.$$

Подставив данные выражения в формулу для общей емкости, найдем

$$C_{\text{общ}} = \frac{|q_1| + |q_2|}{U} = \frac{7C}{5}.$$

Заметим, что первоначальная система уравнений может быть решена быстрее с помощью персонального компьютера.

Данный метод нахождения общей емкости системы конденсаторов универсален. У него есть дополнительное преимущество, что мы не должны знать истинные знаки зарядов заранее: если мы предположили знак неправильно, решение просто даст нам отрицательный ответ.

Применим теперь наш метод к решению конкретных задач.

Задача 1. На рисунке 7 дана цепь, в которой $R_1 = 3R$, $R_2 = R$, $C_1 = C$, $C_2 = 2C$, $C_3 = 3C$, $C = 1 \text{ мкФ}$, $\Phi_1 = 4В$, $\Phi_4 = 0$. Нужно определить заряд на конденсаторе емкостью C_1 .

Решение. Зная, что по конденсаторам ток не идет, найдем общее сопротивление цепи:

$$R_{\text{общ}} = R_1 + R_2 = 4R,$$

ток в цепи:

$$I = \frac{\Phi_1 - \Phi_4}{R_{\text{общ}}} = \frac{\Phi_1}{4R},$$

разность потенциалов между точками 3 и 4:

$$\Phi_3 - \Phi_4 = IR_2 = \frac{\Phi_1}{4},$$

или

$$\Phi_3 = \frac{\Phi_1}{4}.$$

Теперь мы можем решить задачу нашим методом. И первое, что мы делаем, это на схеме в произвольном порядке расставляем заряды (рис.8). Из рисунка видно, что

$$q_1 + q_2 - q_3 = 0.$$

Остальные уравнения, как обычно, добираем из определения электроемкости конденсаторов:

$$\Phi_2 - \Phi_3 = \frac{q_1}{C}, \quad \Phi_2 - \Phi_1 = \frac{q_2}{2C}, \quad \Phi_4 - \Phi_2 = \frac{q_3}{3C}.$$

Зная, что $\Phi_4 = 0$ и $\Phi_3 = \frac{\Phi_1}{4}$, решим данную систему уравнений и найдем искомый заряд q_1 :

$$q_1 = \frac{C\Phi_1}{8} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}.$$

Задача 2. В цепи, изображенной на рисунке 9, $C_1 = C$, $C_2 = 2C$, $C_3 = 3C$, $C_4 = 4C$, $C_5 = 5C$, $C_6 = 6C$, $C_7 = 7C$, $C_8 = 8C$, $C_9 = 9C$, $C_{10} = 10C$, $C_{11} = 11C$, $C_{12} = 12C$, $C = 1 \text{ мкФ}$. Нужно найти общую емкость получившейся цепи конденсаторов.

Решение. Данную задачу можно сразу же решить предлагаемым методом, необходимо только расставить заряды и потенциалы в произвольном порядке – так, как это представлено на рисунке 10. Далее находим области, где суммарный заряд равен нулю – это будут вершины куба. Составляем уравнения зарядов:

$$q_1 + q_4 - q_9 = 0, \quad q_8 + q_9 - q_5 = 0, \quad q_2 - q_1 - q_{12} = 0,$$

$$q_5 + q_6 + q_{12} = 0, \quad q_{10} - q_8 - q_7 = 0, \quad q_3 - q_4 - q_{10} = 0,$$

$$-q_2 - q_3 - q_{11} = 0, \quad q_7 - q_6 + q_{11} = 0.$$

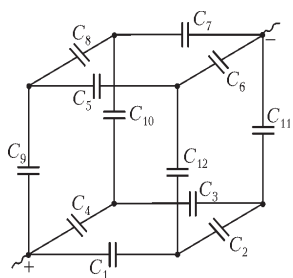


Рис. 9

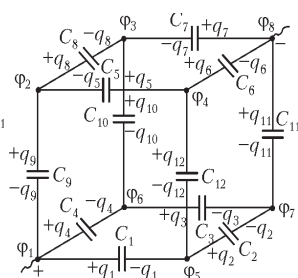


Рис. 10

Остальные уравнения, как обычно, добираем из определения емкости конденсаторов:

$$\Phi_1 - \Phi_3 = \frac{q_1}{C}, \quad \Phi_5 - \Phi_7 = \frac{q_2}{2C}, \quad \Phi_6 - \Phi_7 = \frac{q_3}{3C}, \quad \Phi_1 - \Phi_6 = \frac{q_4}{4C},$$

$$\begin{aligned} \Phi_4 - \Phi_2 &= \frac{q_5}{5C}, \quad \Phi_4 - \Phi_8 = \frac{q_6}{6C}, \quad \Phi_8 - \Phi_3 = \frac{q_7}{7C}, \quad \Phi_2 - \Phi_3 = \frac{q_8}{8C}, \\ \Phi_2 - \Phi_1 &= \frac{q_9}{9C}, \quad \Phi_3 - \Phi_6 = \frac{q_{10}}{10C}, \quad \Phi_8 - \Phi_7 = \frac{q_{11}}{11C}, \quad \Phi_4 - \Phi_5 = \frac{q_{12}}{12C}. \end{aligned}$$

Необходимо определить общую емкость системы, но заряд от положительной клеммы идет только на конденсаторы емкостями C_1 , C_4 и C_9 . Значит, надо найти заряды на этих конденсаторах. Обозначив $\Phi_1 - \Phi_8 = U$, решим полученную систему уравнений и получим

$$q_1 \approx 2,04CU, \quad q_4 \approx 11,16CU, \quad q_9 \approx 13,20CU.$$

Остается только найти общую емкость цепи:

$$C_{\text{общ}} = \frac{q_1 + q_4 - q_9}{U} \approx 26,4C = 26,4 \text{ мкФ}.$$

Соль, огонь и вода

А. СТАСЕНКО

Математика — это вам не физика, где можно химичить.

Однажды на лекции в МФТИ

ВСПОМИНАЕТСЯ ОДИН ИЗВЕСТНЫЙ ФИЗИК, КОТОРЫЙ в молодости был шалуном: «Вуд знал, что натрий, мягкий серебристый металл, если его бросить в воду, внезапно загорается со взрывом и горит ослепительным желтым пламенем, извергая снопы искр и облака белого дыма... он положил в карман, в маленькой жестяной коробочке, шарик из натрия, величиной с грецкий орех ...громко закашлялся и, на виду у всех плюнув в лужу, незаметно бросил шарик в том же направлении. Раздался страшный удар, полетели искры, и большое желтое пламя поднялось на поверхности воды. За ними разверзся ад — вопли, молитвы, перевернутые стулья и один голос...: «Спасайся кто может, негры! Этот человек плюнул огнем!... только сам Старый Сатана умеет это делать!» (из книги В.Сибрука «Роберт Вуд»).

Однако, и мы кое-что умеем. По крайней мере, постараемся понять происходящее.

Натрий $^{23}_{11}\text{Na}$ относится к интересной группе металлов, называемых щелочными. Мы ежедневно употребляем его в пищу — конечно, не в виде металла (ни-ни!), а в соединении с хлором. Это всем известная и вкусная поваренная соль NaCl . В человеческом сознании она почему-то таинственно связана с огнем; в некоторых языках слова «соль» и «солнце» звучат одинаково. В Писании хорошие люди называются «солью земли» и есть удивительное словосочетание — «осолить себя огнем».

Чем же интересны щелочные металлы? А тем, что их внешний электрон, называемый валентным, очень слабо связан с остальной структурой атома, так что атом натрия можно назвать водородоподобным — у атома водорода один протон и один электрон.

Но ведь молекула воды тоже состоит из протона H^+ и гидроксид-иона OH^- (поэтому порой трудно решить — щелочь она или кислота). Значит, все, что происходит при соприкос-

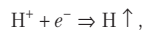
новении натрия с водой, можно представить в виде такого процесса:



Тут слева представлены нейтральный атом натрия, содержащий электрон e^- , слабо связанный с положительным ионом Na^+ , и диссоциированная молекула воды — положительно заряженное ядро атома водорода (протон) H^+ и гидроксид-ион OH^- . Заметим, что свободных протонов в жидкой воде нет — они «прилипают» к нейтральной молекуле, образуя ион гидрония: $\text{H}_3\text{O}^+ \equiv \text{H}^+ + \text{H}_2\text{O}$, так что можно в обеих частях приведенной выше реакции написать по одной нейтральной молекуле воды. Но это для нас несущественно, а существенно то, что протон тоже слабо связан с молекулой воды и его можно считать почти свободным.

Да уж не химия ли это? — спросит вдумчивый читатель.

А что же такое химия, как не физический процесс обмена веществ электронными оболочками! (Не случайно существуют такие интересные науки, как физическая химия и химическая физика.) Вот справа и изображен результат перестройки электронных оболочек: «почти свободный» электрон атома натрия объединяется с «почти свободным» протоном гидрония, образуя нейтральный атом водорода ^1_1H (горючий газ!):



а в воде остается диссоциированная щелочь NaOH .

Так что же происходит с шариком натрия на поверхности воды? Плотность натрия $0,97 \text{ г/см}^3$ меньше плотности воды 1 г/см^3 , и уже поэтому шарик не тонет, а тут еще взрывное тепловыделение при соприкосновении с поверхностью, которое заставляет шарик натрия хаотически метаться, удовлетворяя жажду его атома отдать свой валентный электрон протону воды. Если перейти к энергетическому описанию, то можно сказать, что все эти атомы, ионы, радикалы и электроны сваливаются в потенциальную яму, а разность начального и конечного уровней энергии выделяется в виде кинетической энергии теплового движения конечных продуктов реакции. И вот — освобожденная теплота реакции Q разогревает образовавшийся газ (водород), который всплывает в кислородосодержащей атмосфере, выделяя дополнительную теплоту сгорания.

Можно сделать численные оценки энергетических характеристик некоторых процессов — например, оценить, какая

энергия выделится при захвате электрона протоном, в результате чего образуется нейтральный атом водорода. Конечно, она в точности равна энергии, которую нужно затратить, чтобы «вытащить» электрон с самого нижнего уровня атома водорода «на бесконечность» – эту энергию называют энергией ионизации. Используем старую теорию Бора, согласно которой электрон движется по круговой «орбите» радиусом r со скоростью v . Тогда сумма кинетической и потенциальной энергий электрона равна

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где m – масса электрона, e_0 – его заряд, ϵ_0 – электрическая постоянная. «Скорость электрона» определяется из второго закона Ньютона

$$ma = F, \text{ или } \frac{mv^2}{r} = \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Отсюда и из предыдущего соотношения, считая, что «на бесконечности» электрон покоится, т.е. и кинетическая, и потенциальная энергии равны нулю, получим искомую энергию ионизации (разность конечной и начальной энергий). Однако почему слова «орбита», «скорость электрона» взяты в кавычки? А дело в том, что современная квантовая механика описывает состояние электрона в атоме в других терминах. Но для наших оценок это несущественно.

Итак,

$$E_i = 0 - \left(-\frac{e_0^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 r} \right) = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 9 \cdot 10^9}{2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-10}} \text{ Дж} =$$

$$= 23 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 13,6 \text{ эВ}$$

– знаменитая энергия ионизации атома водорода. Здесь использовано значение классического боровского радиуса $r = 0,5 \text{ \AA} = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}$. Если отнести полученную энер-

гию к массе атома водорода $m_H = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$, то получим удельную теплоту рекомбинации – приблизительно 1400 МДж/кг. По сравнению с нею удельная теплота испарения воды (самый энергоемкий кухонный процесс) порядка 2,5 МДж/кг представляется малой величиной.

Тут следует сделать замечание. Может быть, не все знают, чему равен этот боровский радиус. Желающие найти его могут воспользоваться условием квантования Бора: на длине устойчивой круговой орбиты радиусом r_n должно укладываться целое число длин волн де Бройля $\lambda = \frac{h}{mv}$, где $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ – постоянная Планка. Иными словами,

$$2\pi r_n = n \frac{h}{mv}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Есть наглядная аналогия в макром мире: когда проверяют целостность фарфоровой чашки, по ней слегка ударяют палочкой. Хорошая чашка издает долгоживущий мелодичный звук (как сказал бы китаец, звук «као»), а треснувшая чашка отзывается коротким тупым стуком (нарушено условие периодичности Бора!). Теперь у нас достаточно уравнений, чтобы определить все, что нужно, положив $n = 1$ («первый тон»).

В заключение вспомним событие, имевшее место почти три тысячи лет тому назад и очень напоминающее шутку Роберта Вуда: «И взял Илья двенадцать камней... И построил из сих камней жертвенник. И положил дрова... И сказал: наполните четыре ведра воды, и выливайте на всесожигаемую жертву и на дрова... И вода полилась вокруг жертвенника... подошел Илья пророк и сказал... Услышь меня, Господи!... И ниспал огонь Господа и пожрал всесожжение, и дрова, и камни, и прах, и поглотил воду...» (3-я книга Царств).

Загадки поляризации

К. КОХАНОВ

ХОРОШО ИЗВЕСТНО, ЧТО ПРОДОЛЖИТЕЛЬНАЯ ЛОВЛЯ рыбы в солнечный день без защитных очков может привести к сильному утомлению глаз от сверкающих бликов водной ряби. Какие же защитные очки должны использовать рыболовы? Оказывается, в таких очках установлены специальные фильтры – поляроиды. Они «гасят» большую часть отраженного от воды света, оставляя нетронутой основную часть падающего в глаз прямого светового потока.

Как работают поляроиды? Какое явление положено в основу полезного действия антибликовых очков?¹ Где еще применяется это явление? На эти и другие вопросы мы и попытаемся ответить в этой статье.

Поляризация отраженного света. Видимая часть солнечного излучения представляет собой совокупность электромагнитных волн с длинами волн приблизительно от 350 нм до 800 нм. Это означает, что расстояние между максимумами вектора напряженности электрического поля той или иной волны составляет от $350 \cdot 10^{-9}$ м до $800 \cdot 10^{-9}$ м. Мы не случайно делаем акцент на электрической составляющей электромагнитной волны – именно изменяющееся электрическое поле в этой волне воспринимается нашим глазом.

Для удобства световой пучок, падающий в наш глаз, договоримся изображать вектором скорости $\vec{c}$ вместе с перпендикулярными к нему векторами электрической напряженности $\vec{E}$. На рисунке 1 показан световой луч – вид сбоку и в направлении «к нам». В так называемом естественном свете в каждом луче колебания электрической напряженности происходят по всем направлениям, перпендикулярным скорости. Но для простоты указывают не все векторы $\vec{E}$, а лишь несколько.

Рассмотрим отражение светового луча от гладкой диэлектрической поверхности. Попавшая на поверхность диэлектрика электромагнитная волна поглощается молекулой и тут же переизлучается в виде двух волн, одна из которых распространяется в толщу диэлектрика, а другая – обратно в ту среду, из которой пришла падающая волна. Если угол между отраженным и преломленным лучами окажется прямым, то в отраженной волне останутся колебания вектора напряженности только в одном направ-

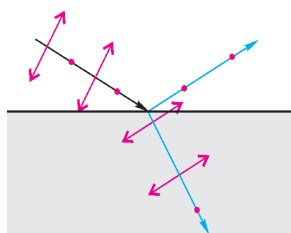


Рис. 2

лении – перпендикулярном плоскости чертежа в нашем случае (рис.2). Почему так?

Дело в том, что соответствующая волна была рождена молекулой, «раскачанной» падающим светом, и некоторые векторы напряженности оказались параллельными вектору скорости отраженного луча. Однако в световой волне колебаний с таким направлением быть не может – волна является поперечной. Так отраженный от диэлектрика свет оказывается плоскополяризованным, т.е. лишенным колебаний вектора электрической напряженности во всех плоскостях, кроме одной. Иногда такую поляризацию называют линейной.

В заключение отметим, что угол падения, при котором световой луч становится плоскополяризованным, называется углом Брюстера Φ_B . Он связан с показателем преломления среды n соотношением $\text{tg } \Phi_B = n$.

Регистрация поляризации. Невооруженный глаз не в состоянии определить, является ли попавший в него свет поляризованным. Обнаружить линейную поляризацию можно с помощью специального устройства – поляризатора, превращающего естественный свет в поляризованный. В школе в качестве поляризатора чаще всего используется пластинка турмалина или поляроид. Поворачивая поляризатор – часто поляризатор в этой роли называют анализатором – и наблюдая за изменением интенсивности прошедшего через него света, делают вывод о поляризованности световой волны. Если при некотором положении анализатора интенсивность света уменьшается до нуля, то свет является плоскополяризованным.

Как уже говорилось, если взглянуть через поляроид на солнечные блики, появляющиеся на водной глади, то окажется, что их яркость значительно уменьшается и они больше не мешают наблюдениям за водой.

Интересный результат получается также при рассмотрении сквозь поляроид экрана жидкокристаллического монитора. В зависимости от угла поворота анализатора яркость экрана значительно меняется (рис.3). Тот же самый эффект



Рис. 3

получится при экспериментировании с жидкокристаллическим экраном часов или сотового телефона.

Особенности прохождения через поляроид инфракрасного света. Наиболее распространенными источниками инфракрасных (ИК) волн являются нагретые тела. Такие волны имеют длину волны приблизительно от 760 нм до 1 мм и невооруженным глазом не воспринимаются. ИК-излучение регистрируется приборами с зарядовой связью (ПЗС)², которые лежат в основе светочувствительных элементов цифровых фотоаппаратов и цифровых камер мобильных телефонов.

¹ Об антибликовых очках, а также о жидкокристаллических дисплеях можно прочитать в «Кванте» №2 за 2009 год в разделе «Погрузки с физикой». (Прим.ред.)

² Об этих приборах можно прочитать в «Кванте» №1 за 2010 год в разделе «Новости науки». (Прим. Ред.)

Удобное для экспериментирования излучение можно создать пультом дистанционного управления, который посылает управляющие сигналы, например к телевизору, как раз посредством электромагнитных импульсов инфракрасного диапазона. Эти импульсы испускаются светодиодом. Если на работающий светодиод направить объектив цифрового фотоаппарата, то на его экранчике можно заметить пульсирующее фиолетовое свечение диода.

Для лучшего наблюдения свечения можно подключить диод непосредственно к источнику тока (рис. 4; здесь изображены элемент питания и светодиод по отдельности и в соединенном виде), соблюдая полярность (длинный контакт

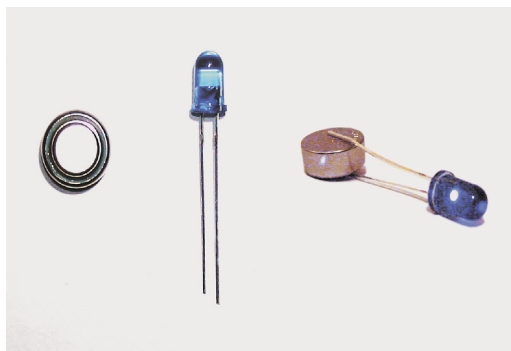


Рис. 4

— к положительному полюсу; пайка контакта не нужна). В качестве источника тока подойдет батарейка типа LR44.

Если эффект наблюдается слабо, можно попробовать сделать следующее: 1) создать в помещении небольшое затемнение или, по крайней мере, убедиться, что в помещение не попадают прямые солнечные лучи; 2) предварительно подготовить фотоаппарат, т.е. установить режим «макросъемка», поставить в автоматический режим чувствительность фотоаппарата и скорость срабатывания затвора и отключить фотовспышку; 3) диод закрепить непосредственно перед объективом фотоаппарата.

Перейдем непосредственно к рассматриваемому вопросу и выясним, в чем же особенность прохождения через поляроид инфракрасного света. Для опыта нам понадобится лампа накаливания (фонарик), два пленочных поляроида (их можно приобрести в магазине рыболовных снастей) и цифровой фотоаппарат. Зажженную лампу располагаем напротив объектива фотоаппарата. Между ними помещаем два поляроида, поворачиваем один из них до того момента, пока свет от лампы не перестанет через них проходить. А вот теперь попробуем сфотографировать этот «исчезнувший» проходящий пучок на цифровой фотоаппарат. Результат оказывается удивительным — фотоаппарат регистрирует свечение. Отсюда мы делаем вывод, что поляроиды не поляризовали инфракрасное излучение.

Фокусы с поляризацией. Следующие эксперименты вы можете показать своим друзьям как физические фокусы.

Исчезновение лазерного «зайчика». Схема установки для эксперимента представлена на рисунке 5. Пучок от лазерной указки (3), которая включается кнопкой (4), с помощью зеркала (2) направляется на экран (1). При изменении наклона зеркала относи-

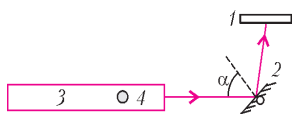


Рис. 5

тельно оси пучка яркость «зайчика» остается примерно одинаковой независимо от его положения на экране.

Затем эксперимент повторяется еще раз, но с другим зеркальцем. На экран вновь направляется лазерный пучок. Но теперь видно, что при повороте зеркала яркость пятна меняется и при определенном угле «зайчик» исчезает совсем. Почему?

Оказывается, в опыте используется специально подготовленное зеркальце размером приблизительно 30×70 мм. Зеркальце двухстороннее: на одной стороне нанесено алюминиевое (обычное для зеркала) напыление, а другая сторона заклеена черной бумагой. И с обеих сторон зеркальца приклеены прозрачные стекла. В первом случае зеркальце было обращено к световому пучку алюминиевым напылением, а второй раз — черной подложкой. Иными словами, сначала свет отражался от электропроводящей поверхности, а затем — от диэлектрической.

Далее следует учесть, что лазерное излучение представляет собой линейно поляризованный свет. Причина разных результатов экспериментов заключается в особенностях механизма отражения такого света от различных по электрическим свойствам поверхностей. Так, при отражении от диэлектрика линейно поляризованный свет не изменяет характера поляризации (не может стать, например, неполяризованным или эллиптически поляризованным), поэтому при угле падения, равном углу Брюстера, свет вообще не отражается. При взаимодействии же поляризованного света с проводящей поверхностью линейная поляризация преобразуется в круговую, что ведет к возможности наблюдения отраженного от зеркала луча даже при угле Брюстера.

Заметим, что в световом пучке, создаваемом лазерной указкой, вектор электрической напряженности лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости, образованной осью пучка и кнопкой-включателем (рис. 6). Поэтому для успешного проведения опыта необходимо, чтобы кнопка на указке «смотрела» на нас.

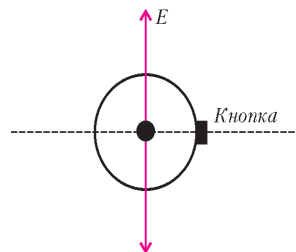


Рис. 6

Появление лазерного «зайчика». Предыдущую демонстрацию можно продолжить таким экспериментом. Когда отраженное пятнышко исчезло (при расположении диэлектрического зеркальца под углом Брюстера), между лазером и зеркальцем помещается стеклянная пластинка. При этом на экране вспыхивает лазерное пятнышко, что означает отражение поляризованного света от диэлектрической поверхности даже при угле Брюстера. А вот если пластинку немного сдвинуть относительно оси светового пучка, то пятнышко не «проявляется». Почему?

Дело в том, что половина стеклянной пластинки обклеена целлофановой пленкой (практически незаметной на стекле). Пленка изменяет ориентацию плоскости поляризации лазерного луча, отчего на зеркальце попадает пучок, поляризованный в иной плоскости, чем ранее, и при взаимодействии с диэлектрической стороной зеркальца не гасится полностью.

Для опыта подойдет, например, целлофановая пленка от упаковки лазерной указки.

Загадка отражения экрана монитора. На рисунке 7 показано отражение экрана жидкокристаллического монитора от двух стекол, расположенных около экрана перпенди-



Рис. 7

жидкокристаллического монитора, линейно поляризован. Поскольку стекло является диэлектриком, то свет при отражении от него также поляризуется. Улыбка же появилась вследствие того, что на экран была наложена целлофановая пленка, вырезанная в виде улыбки. Как уже говорилось, целлофан поворачивает вектор поляризации, поэтому плос-

колярно друг другу. В одном из стекол яркость отраженного экрана значительно больше, чем в другом. В нижнем отражении экрана хорошо видна темная улыбка (на боковом отражении также виден краешек улыбки, только светлой). Как удалось добиться такого эффекта?

Напомним, что свет, выходящий из экрана

имеет определенную степень поляризации света, вышедшего из целлофана, иная, чем у остального света, и при отражении от стекла гашение световых потоков оказывается неодинаковым.

Для того чтобы целлофановая пленка не была видна на экране, ее нужно смочить водой и, плотно приложив к экрану, пригладить рукой.

Применение поляризации. Явление поляризации света при отражении используется, например, для обнаружения из космоса пленок нефти на поверхности моря.

Свет различных небесных светил и космических объектов во многих случаях оказывается поляризованным. Исследование его поляризации дает существенную информацию о свойствах планет, звезд, туманностей и так далее.

Рассеянный свет, например солнечный свет, рассеянный на флуктуациях плотности атмосферы, тоже частично поляризован. Снег или облака уменьшают степень поляризации рассеянного света, и это обстоятельство можно использовать для прогнозирования погоды. По степени поляризации солнечного света можно также определять уровень загрязненности атмосферы.

Шанс на решение задачи

Олимпиада в Астане была одной из самых сложных в истории международных олимпиад.

LI Международная математическая олимпиада («Квант» №6 за 2010 год)

Анализируя результаты решения геометрических задач на LI Международной математической олимпиаде, я обратил внимание на «ноль» участника, единственного в российской команде не решившего задачу 2. Вот условие этой задачи.

Задача. Точка I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC , а Γ – окружность, описанная около этого треугольника. Прямая AI пересекает окружность Γ в точках A и D . Точка E выбрана на дуге BDC , а точка F – на стороне BC так, что

$$\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2} \angle BAC.$$

Точка G – середина отрезка IF . Докажите, что прямые DG и EI пересекаются в точке, лежащей на окружности Γ .

«Профессиональный» олимпиадник, тем более на уровне Международной олимпиады, обречен на неудачу, если не владеет стандартными ситуациями, как шахматист – знанием дебютов или сыгранных знаменитостями партий. Бывают просто казусные ситуации: на IV Международной математической олимпиаде фигурировала в «чистом виде» формула Эйлера $OI^2 = R^2 - 2Rr$. Сегодня невозможно представить, чтобы олимпиадный боец ее не знал. Готовясь к «бою», участники собирают заготовки, стандартные геометрические (да и не только) ситуации и приемы решения, которыми могут и обязаны воспользоваться. Знание их и дает тот шанс на решение предложенной Гонконгом задачи, о котором пойдет речь.

Очевидно, что требование задачи можно заменить доказательством равенства $\angle AEQ = \angle ADQ$ где Q – точка пересечения прямых DG и EI (см. рисунок). Сравнение этих углов показывает, что угол IDG менее «удобен», чем угол AEI , который является углом треугольника AEI . Наличие в условии точки G подсказывает введение вспомогательной

точки J – центра вневписанной окружности треугольника ABC : по известной теореме, $ID = DJ$, чем в данном случае целесообразно воспользоваться, потому что GD – средняя линия треугольника IFJ .

И снова трудность: подсчет углов треугольников AIE и AFJ результата не даст, а вот доказать их подобие... Тем более что равные углы при вершине A есть: $\angle FAJ = \angle IAE$. Значит, надо доказать пропорциональность сторон:

$$\frac{AJ}{AE} = \frac{AF}{AI}. \quad (1)$$

Первую пару подобных треугольников найти нетрудно: $\triangle ABF \sim \triangle AEC$, откуда

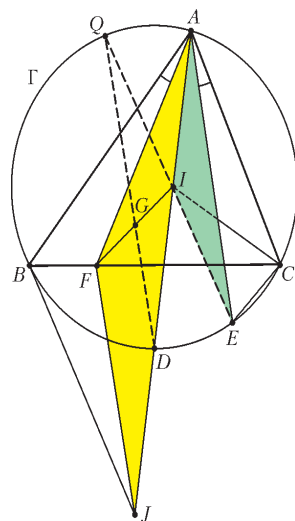
$$\frac{AF}{AB} = \frac{AC}{AE}. \quad (2)$$

Второе подобие было описано в статье «Семейство формул Лагранжа» («Квант» №2 за 2011 г.): $\triangle ABJ \sim \triangle AIC$. Это тоже заготовка, потому что оба угла $\angle ABJ$ и $\angle AIC$ равны $90^\circ + \frac{\angle B}{2}$, и треугольники подобны по двум углам. Следовательно,

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AC}{AJ}. \quad (3)$$

Разделим почленно равенства (2) и (3): $\frac{AF \cdot AB}{AB \cdot AI} = \frac{AC \cdot AJ}{AE \cdot AC}$, получим $\frac{AJ}{AE} = \frac{AF}{AI}$ – равенство (1). Задача решена.

И. Кушнир



Решение задач на тонкие линзы

А. ЧЕРНОУЦАН

Для решения задач с тонкими линзами надо знать совсем немного. Напомним их основные свойства.

1) Характер линзы зависит от радиусов образующих ее сферических поверхностей и от показателя преломления материала линзы относительно окружающей среды $n = n_2/n_1$. При $n > 1$ двояковыпуклая и плосковыпуклая линзы – собирающие, двояковогнутая и плосковогнутая линзы – рассеивающие; при $n < 1$ – наоборот. Эти утверждения следуют из формулы для фокусного расстояния F :

$$\frac{1}{F} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где радиус выпуклой поверхности считается положительным, а радиус вогнутой – отрицательным. Если F положительно, то линза собирающая, в противном случае – рассеивающая. Эту формулу знать полезно, но необязательно.

Пример 1 (ЕГЭ). Из очень тонких одинаковых сферических стеклянных сегментов изготовлены линзы, представленные на рисунке 1. Если показатель преломления глицерина больше, чем показатель преломления воды, то собирающая линза представлена на рисунке: 1); 2); 3); 4).

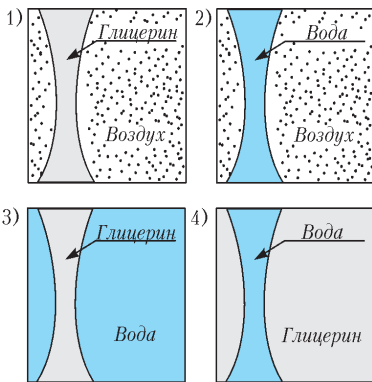


Рис. 1

рина больше, чем показатель преломления воды, то собирающая линза представлена на рисунке: 1); 2); 3); 4). (Ответ: 4).)

2) Для решения задач полезно знать ход основных лучей.

а) Лучи, идущие через оптический центр линзы, не испытывают отклонения.

б) Лучи, падающие параллельно главной оптической оси (рис.2), сходятся в фокусе, лежащем за линзой – в случае

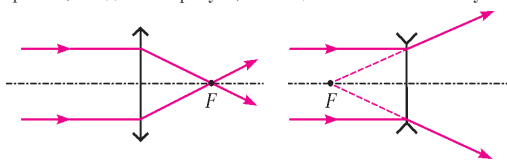


Рис. 2

собирающей линзы, или расходятся из фокуса, лежащего перед линзой – в случае рассеивающей линзы.

в) Обратное утверждение: прошедший линзу луч пойдет параллельно ее главной оптической оси, если линия его падения проходит через фокус собирающей линзы, лежащий перед линзой, или через фокус рассеивающей линзы, лежащий за линзой (рис.3).



Собирающая линза Рассеивающая линза

Рис. 3

Пример 2. На собирающую линзу с фокусным расстоянием $F_1 = 17$ см падает пучок света, параллельный ее главной оптической оси. На каком расстоянии от этой линзы нужно поставить рассеивающую линзу с фокусным расстоянием $F_2 = 0,09$ м, чтобы пучок, пройдя обе линзы, остался параллельным?

(Ответ: $l = F_1 - F_2 = 8$ см; см. рис.4.)

г) Лучи, идущие параллельно друг другу, но не параллельно главной оптической оси (рис.5), собираются в точке

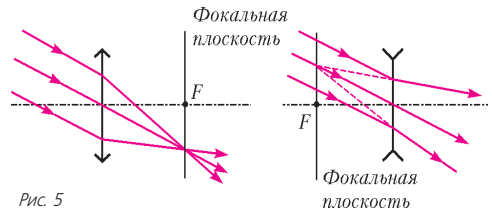


Рис. 5

фокальной плоскости, расположенной за линзой (собирающая линза), или расходятся из точки фокальной плоскости, расположенной перед линзой (рассеивающая линза).

Пример 3. Постройте ход произвольного луча после прохождения собирающей (рассеивающей) линзы.

(Ответ: см. рис.6; пунктиром показан вспомогательный луч.)

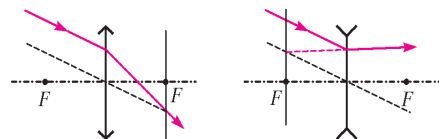


Рис. 6

3) Формула тонкой линзы.

Точечным источником обычно называют светящуюся точку, испускающую световые лучи в сторону линзы. Более общее определение: источник – это точка

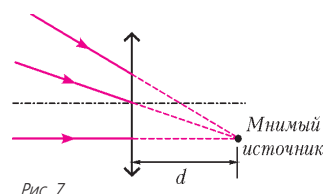


Рис. 7

пересечения лучей, падающих на линзу (такое определение позволяет вводить в рассмотрение *мнимые источники*; см. рис.7). *Изображением точечного источника* называют точку пересечения лучей, прошедших линзу. Расстояния от источника до линзы d , от изображения до линзы f и фокусное расстояние F связаны соотношением

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \quad (1)$$

где D – оптическая сила линзы, выражается в диоптриях, 1 дптр = 1/м. При применении формулы тонкой линзы (1) надо пользоваться следующими правилами знаков:

а) F и D положительны для собирающей линзы (действительный фокус) и отрицательны для рассеивающей линзы (мнимый фокус);

б) $f > 0$ для действительного изображения, $f < 0$ для мнимого изображения.

в) $d > 0$ для действительного источника, $d < 0$ для мнимого источника.

Замечание. При решении задач удобнее считать f , d и F положительными, а знаки учитывать в явном виде. Тогда формула (1) принимает вид

$$\pm \frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = \pm \frac{1}{F} \quad (2)$$

(оптическая сила D может быть как положительной, так и отрицательной).

Пример 4. На линзу падает сходящийся пучок лучей. После прохождения через линзу лучи пересекаются в точке, лежащей на расстоянии 15 см от линзы. Если линзу убрать, то точка пересечения лучей переместится на 5 см ближе к линзе. Определите фокусное расстояние линзы.

В этом случае формула (2) принимает вид

$$-\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

где $d = 10$ см (мнимый источник), $f = 15$ см (действительное изображение). Получаем $F = -30$ см. Поскольку тип линзы не был задан, то правую часть формулы мы написали с плюсом, а по знаку ответа установили, что линза рассеивающая.

4) Увеличение линзы. Увеличением линзы (точнее – линейным увеличением, поскольку есть еще и угловое) называется отношение линейных размеров изображения к линейным размерам предмета. Для поперечного увеличения, т.е. для размеров в направлении, перпендикулярном главной оптической оси, верна формула

$$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{f}{d}, \quad (3)$$

которая следует из подобия соответствующих треугольников (рис.8). Отметим, что если пользоваться формулой линзы в

форме (1), то формулу (3) надо писать с модулями, что неудобно, или вводить отрицательное Γ для случая прямого (не перевернутого) изображения, т.е. когда источник и изображение находятся по одну сторону от линзы (например, действительный источник и мнимое изображение). Такой подход возможен, но он слишком формален и чреват ошибками. Поэтому мы будем пользоваться формулами (2), (3).

5) Основные случаи. Полезно помнить несколько основных случаев взаимного расположения и соотношения разме-

ров *действительного* источника и его изображения. Конечно, все можно быстро извлечь из формул (2), (3), но лучше таким образом вспомнить забытое, а не выводить впервые.

а) Рассеивающая линза. Изображение мнимое, прямое, уменьшенное ($f < d$, $\Gamma < 1$). Формула (2) принимает вид

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}.$$

Ход основных лучей показан на рисунке 9.

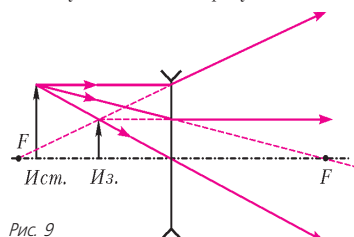


Рис. 9

б) Собирающая линза, $d < F$. Изображение мнимое, прямое, увеличенное ($f > d$, $\Gamma > 1$). Формула (2) принимает вид

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Ход основных лучей показан на рисунке 10.

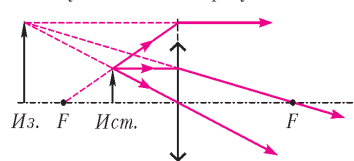


Рис. 10

в) Собирающая линза, $d > F$, $d < 2F$. Изображение действительное, перевернутое, увеличенное ($f > 2F$, $\Gamma > 1$). Ход основных лучей показан на рисунке 11.

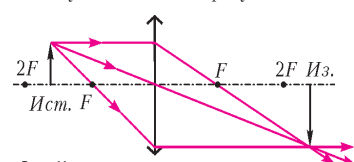


Рис. 11

г) Собирающая линза, $d = 2F$. Изображение действительное, перевернутое, в натуральную величину ($f = d$, $\Gamma = 1$).

д) Собирающая линза, $d > 2F$. Изображение действительное, перевернутое, уменьшенное ($f > F$, $f < 2F$, $\Gamma < 1$).

Формула (2) для случаев в) – д) имеет вид

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Пример 5 (ЕГЭ). В какой из точек, показанных на рисунке 12 (точки 1, 2, 3 или 4), будет наблюдаться изображение пламени свечи (S), создаваемое собирающей линзой?

Поскольку $d > F$, то изображение действительное. Остаются точки 3 или 4. Но поскольку $d < 2F$, то должно быть $f > 2F$, т.е. остается только точка 4.

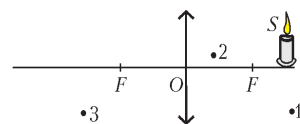


Рис. 12

Перейдем к решению задач. Начнем с задач, при решении которых надо использовать ход лучей и геометрические соображения.

Задача 1 (ЕГЭ). Пучок параллельных световых лучей падает перпендикулярно на тонкую собирающую линзу

оптической силой 5 дптр (рис.13). Диаметр линзы 6 см. Диаметр светлого пятна на экране 12 см. На каком расстоянии от линзы помещен экран?

Решение. После прохождения собирающей линзы лучи сходятся в фокусе, и, чтобы получить пятно с диаметром, большим диаметра линзы, надо расположить экран достаточно далеко за фокусом (рис.14). Из подобия треугольников получаем

$$\frac{F}{l - F} = \frac{d_n}{d_l},$$

Рис. 14

откуда

$$l = F \left(1 + \frac{d_n}{d_l} \right) = \frac{1}{D} \left(1 + \frac{d_n}{d_l} \right) = 60 \text{ см.}$$

Задача 2 (ЕГЭ). Пучок параллельных световых лучей падает нормально на тонкую собирающую линзу диаметром 6 см и оптической силой 5 дптр (рис.15). Экран освещен неравномерно. Выделяется более освещенная часть экрана (в форме кольца). Рассчитайте внутренний диаметр светлого кольца, создаваемого на экране. Экран находится на расстоянии 50 см от линзы.

Решение. Выясним, где должен находиться экран, чтобы на нем наблюдалась описанная в условии картинка. Ход лучей и несколько экранов показаны на рисунке 16. На

Рис. 15

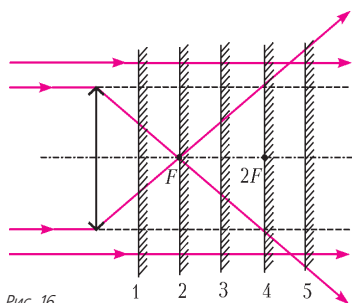


Рис. 16

экране 1 будет равномерный светлый фон вне круга с диаметром, равным диаметру линзы, затем темное кольцо и внутри него более яркий светлый круг, образованный лучами, преломленными в линзе. На экране 2 светлый круг уменьшится до размеров светящейся точки. На экране 3

картинка будет такого же характера, как на экране 1. На экране 4, расположенном на расстоянии $2F$ от линзы, темное кольцо исчезнет, и экран будет освещен равномерно. На экране 5 вне круга с диаметром, равным диаметру линзы, который будет теперь менее ярким, чем внешняя область, возникнет долгожданное светлое кольцо, освещенное как лучами, идущими мимо линзы, так и лучами, прошедшими линзу. Хорошо видно, что внутренний диаметр этого кольца равен диаметру линзы, т.е. 6 см.

Задача 3. На рисунке 17 изображены линейный источник AB и его изображение $A'B'$. Найдите расположение линзы и положение ее фокусов. Попробуйте сами так изменить расположение стрелок, чтобы: а) линза получилась собирающая, а изображение мнимое; б) линза получилась рассеивающая.

Решение. Поскольку луч, идущий вдоль AB , проходит

через все точки источника, то после преломления в линзе он должен пройти через все точки изображения, т.е. пойти вдоль $A'B'$. Поэтому точка C пересечения прямых AB и $A'B'$ должна принадлежать линзе (рис.18). Кроме того, прямые AA' и BB' должны проходить через оптический центр линзы, т.е. он находится в точке O на пересечении этих прямых. Получаем, что линза расположена вдоль CO , а главная оптическая ось OD перпендикулярна CO . Если пустить луч AE параллельно OD , то преломленный луч EA' пересечет OD в фокусе F . Аналогично (с помощью лучей

Рис. 18

$A'G$ и GA) построим другой фокус. Видим, что при данном расположении AB и $A'B'$ линза получилась собирающая.

Замечание. Изображение в тонкой линзе формируется только лучами, падающими под малыми углами к главной оптической оси (параксиальными лучами). Однако в задачах на построение используются лучи, идущие под значительными углами к оптической оси. Законно ли это? Оказывается, да. Дело в том, что любой рисунок на построение (с помощью трех основных лучей) можно сжать в n раз в поперечном направлении (уменьшив в n раз расстояние от произвольной точки до оси). В результате все наклонные лучи станут параксиальными, параллельные лучи останутся параллельными, а ход лучей не нарушится. При этом продольные расстояния не изменятся (формулы (1), (2) останутся верными), и отношения поперечных отрезков также сохранятся (формула (3) не нарушится).

Разберем теперь несколько задач на формулу линзы.

Задача 4. Два точечных источника света находятся на расстоянии $L = 24$ см друг от друга. Между ними на расстоянии $d_1 = 6$ см от одного из них помещена тонкая линза. При этом изображения обоих источников получились в одной и той же точке. Найдите фокусное расстояние линзы.

Решение. Поскольку источники находятся по разные стороны от линзы, то для одного из них изображение будет действительным, а для другого мнимым. Следовательно, линза собирающая. Первый источник находится ближе к

линзе, поэтому именно он должен давать мнимое изображение. Запишем формулу линзы для первого и для второго источника:

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

$$\frac{1}{L - d_1} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Исключив f , получим

$$F = \frac{2d_1(L - d_1)}{L} = 9 \text{ см.}$$

Задача 5. Расстояние между светящейся точкой и экраном $L = 3,75$ м. Четкое изображение точки на экране получается при двух положениях собирающей линзы, расстояние между которыми $l = 0,75$ м. Найдите фокусное расстояние линзы.

Решение. Если не задумываясь, в лоб, записать уравнения для d_1, d_2, f_1, f_2, F : два раза формулу линзы, а также соотношения $d_1 + f_1 = L$, $d_2 + f_2 = L$, $d_2 - d_1 = l$, то получим пять уравнений с пятью неизвестными, возиться с которой, мягко говоря, неприятно. Однако простые рассуждения, основанные на обратимости лучей и на симметрии формулы линзы, позволяют резко упростить расчеты. Рассмотрим одно из положений, которому соответствуют расстояния d_1 ,

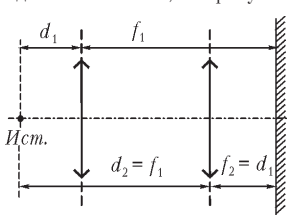


Рис. 19

не нарушится. В результате получаем два уравнения для d_1, f_1 :

$$d_1 + f_1 = L,$$

$$f_1 - d_1 = l.$$

Найдем отсюда d_1, f_1 , подставим их в формулу линзы и получим

$$\frac{1}{F} = \frac{2}{L - l} + \frac{2}{L + l}, \quad F = \frac{L^2 - l^2}{4L} = 0,9 \text{ м.}$$

Рассмотрим теперь задачи на систему из нескольких линз. Принцип решения таких задач ясен: надо рассматривать линзы одну за другой, причем изображение от предыдущей линзы является источником для последующей.

Задача 6. Точечный источник света находится на расстоянии $d_1 = 9$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 6$ см. Позади этой линзы на расстоянии $l = 6$ см от нее находится другая точно такая же линза. На каком расстоянии от второй линзы получится изображение источника, сформированное системой линз?

Решение. Из формулы (2) для первой линзы

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_1}$$

найдем $f_1 = 18$ см. Поскольку $f_1 > l$, то лучи сходятся за второй линзой (рис. 20), т.е. представляют собой мнимый источник с $d_2 = f_1 - l = 12$ см. Подставляя d_2 в формулу (2)

для второй линзы

$$-\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F_2},$$

найдем $f_2 = 4$ см (изображение действительное). Отметим, что при использовании формулы линзы в форме (1)

надо просто подставлять $d_2 = l - f_1$, не думая о знаке — он получится автоматически правильным.

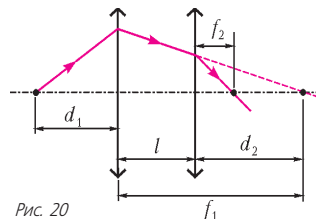


Рис. 20

Задача 7 (ЕГЭ). На оси x в точке $x_1 = 0$ находится оптический центр тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = -20$ см, а в точке $x_2 = 20$ см — тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_2 = 30$ см. Главные оптические оси обеих линз лежат на оси x . Свет от точечного источника, расположенного в точке $x < 0$, пройдя данную оптическую систему, распространяется параллельным пучком. Найдите координату x точечного источника.

Решение. Чтобы после второй линзы идти параллельным пучком, лучи должны падать на эту линзу, расходясь из ее левого фокуса, т.е. из точки с координатой $x_{\text{ист}2} = x_2 - F_2 = -10$ см. Поскольку эта точка лежит левее первой линзы (рис. 21), то она соответствует мнимому изображению с $f_1 = |x_{\text{ист}2}|$. Из формулы (2) для первой линзы

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_1} = -\frac{1}{|F_1|}$$

Рис. 21

находим $d_1 = 20$ см, т.е. координата источника $x = -d_1 = -20$ см. (Если использовать формулу линзы в форме (1), то f_1 и F_1 надо записывать без модулей.)

Можно рассуждать немного по-другому. Рассмотрим обратный ход лучей — справа налево. После прохождения второй линзы лучи соберутся в ее фокусе и будут представлять собой мнимый источник для первой линзы. Записав формулу (2) для линзы 1 с мнимым источником, получим действительное изображение, которое и является источником для прямого хода лучей.

Рассмотрим теперь несколько задач на увеличение линзы.

Задача 8. Дерево сфотографировано с расстояния $d = 10$ м. Оптическая сила объектива фотоаппарата $D = 12,6$ дптр. Ширина изображения ствола дерева на фотопленке $l' = 2$ мм. Найдите диаметр ствола l .

Решение. Запишем формулу для поперечного увеличения линзой горизонтального отрезка — диаметра дерева:

$$\Gamma = \frac{l'}{l} = \frac{f}{d}.$$

Отсюда получаем

$$l = l' d \frac{1}{f},$$

а величину $1/f$ находим из формулы линзы:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{d} = D - \frac{1}{d}.$$

Окончательно находим

$$l = l' d \left(D - \frac{1}{d} \right) = 0,25 \text{ м.}$$

Задача 9. Линза с фокусным расстоянием $F_1 = 12$ см формирует уменьшенное в 3 раза действительное изображение предмета ($\Gamma_1 = 1/3$). Другая линза, помещенная на место первой, формирует его увеличенное в 3 раза действительное изображение ($\Gamma_2 = 3$). Найдите фокусное расстояние второй линзы.

Решение. Выразив из формулы (3) расстояние от изображения до линзы: $f_1 = \Gamma_1 d_1$ и подставив в формулу линзы (2), найдем расстояние от источника до линзы:

$$d_1 = F_1 \left(1 + \frac{1}{\Gamma_1} \right).$$

Выразив аналогичным образом d_2 и приравняв d_1 к d_2 (расстояние от предмета до линзы не меняется), получим

$$F_2 = F_1 \frac{(1 + 1/\Gamma_1)}{(1 + 1/\Gamma_2)} = 36 \text{ см.}$$

Задача 10. Рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F = 4$ см дает уменьшенное в 4 раза ($\Gamma = 1/4$) изображение предмета. Найдите расстояние от предмета до изображения.

Решение. Как мы уже видели в предыдущей задаче, по фокусному расстоянию и увеличению линзы можно (зная характер изображения – действительное, мнимое) однозначно установить положение предмета (и изображения). В случае рассеивающей линзы из уравнений

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}, \quad \frac{f}{d} = \Gamma$$

получим

$$d = F \left(\frac{1}{\Gamma} - 1 \right), \quad f = F(1 - \Gamma).$$

Предмет и изображение находятся по одну сторону от линзы, и расстояние между ними равно

$$l = d - f = F \left(\Gamma + \frac{1}{\Gamma} - 2 \right) = 9 \text{ см.}$$

Если использовать формулу линзы в форме (1), то формулы надо писать без минусов, но F , f и Γ в случае рассеивающей линзы надо считать отрицательными.

Задача 11 (ЕГЭ). На экране с помощью тонкой линзы получено изображение предмета с пятикратным увеличением ($\Gamma_1 = 5$). Экран передвинули на $l = 30$ см вдоль главной оптической оси линзы. Затем при неизменном положении линзы передвинули предмет, чтобы изображение снова стало резким. В этом случае получилось изображение с трехкратным увеличением ($\Gamma_2 = 3$). На сколько пришлось передвинуть предмет относительно его первоначального положения?

Решение. Отметим, что для действительных изображений в собирающей линзе из формул

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \quad \frac{f}{d} = \Gamma$$

следует, что если d увеличивается, то f и Γ уменьшаются. Следовательно, $d_2 > d_1$ и $f_2 < f_1$. Выразив (как в задаче 10) из этих формул d и f через Γ и F , получим

$$d_1 = \left(1 + \frac{1}{\Gamma_1} \right) F, \quad d_2 = \left(1 + \frac{1}{\Gamma_2} \right) F, \quad x = d_2 - d_1 = \left(\frac{1}{\Gamma_2} - \frac{1}{\Gamma_1} \right) F,$$

$$f_1 = (1 + \Gamma_1) F, \quad f_2 = (1 + \Gamma_2) F, \quad l = f_1 - f_2 = (\Gamma_1 - \Gamma_2) F.$$

Следовательно,

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{\Gamma_1 \Gamma_2}, \quad x = \frac{l}{\Gamma_1 \Gamma_2} = 2 \text{ см.}$$

Полученный ответ можно интерпретировать еще и так: если два предмета, расположенные на главной оптической оси за фокусом собирающей линзы, изображаются в линзе с увеличениями Γ_1 и Γ_2 , то расстояние между изображениями предметов в $\Gamma_1 \Gamma_2$ раз больше расстояния между предметами. Проверьте самостоятельно, изменится ли этот результат, если оба предмета находятся перед фокусом собирающей линзы или если линза рассеивающая.

Задача 12 (ЕГЭ). Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC площадью $S = 50$ см² расположен перед тонкой собирающей линзой так, что его катет AC лежит на главной оптической оси линзы (рис. 22). Фокусное расстояние линзы $F = 50$ см. Вершина прямого угла C лежит ближе к центру линзы, чем вершина острого угла A . Расстояние от центра линзы до точки C равно удвоенному фокусному расстоянию линзы. Постройте изображение треугольника и найдите площадь получившейся фигуры.

Решение. Поскольку треугольник равнобедренный, $S = a^2/2$, откуда находим его катеты:

$$a = \sqrt{2S} = 10 \text{ см.}$$

Так как при $d = 2F$ получается $f = 2F$, то BC переходит в такой же по величине отрезок $B'C'$ (рис. 23). Расстояние от

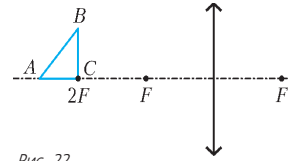


Рис. 22

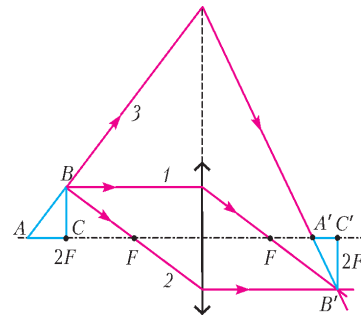


Рис. 23

точки A до линзы равно

$$d_1 = 2F + a.$$

Выразим с помощью формулы линзы расстояние от линзы до точки A' :

$$f = \frac{F(2F + a)}{F + a}$$

и найдем

$$b = A'C' = 2F - f = \frac{Fa}{F + a}.$$

Тогда

$$S' = \frac{ab}{2} = S \frac{F}{F + a} = 41,7 \text{ см}^2.$$

Чтобы построить изображение треугольника, надо сначала построить изображение B' точки B с помощью стандартных лучей (например, лучей 1 и 2), после чего можно использовать луч 3, идущий вдоль AB , который после линзы проходит через B' , и на его пересечении с главной оптической осью найти A' .

В заключение рассмотрим задачи на движение источника и изображения.

Задача 13. Точечный источник находится на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 6$ см на расстоянии $d = 8$ см от линзы. Линзу начинают смещать со скоростью $v = 3$ мм/с в направлении, перпендикулярном оптической оси. С какой скоростью движется изображение источника?

Решение. Пусть линза движется вверх. Перейдем в систему отсчета, в которой линза неподвижна. В этой системе отсчета источник движется вниз со скоростью v , а поскольку расстояние от изображения до оси в каждый момент в Γ раз больше, чем расстояние от источника до оси ($\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{F}{d-F}$ – увеличение линзы), то изображение движется вверх со скоростью Γv . Применяя формулу сложения скоростей, получаем, что в первоначальной системе отсчета (где источник неподвижен) изображение движется вверх со скоростью

$$v_1 = v + \Gamma v = \frac{dv}{d-F} = 12 \text{ мм/с}.$$

Задача 14. Точечный источник движется со скоростью $v = 2$ мм/с вдоль главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 8$ см. С какой скоростью движется изображение источника в тот момент, когда источник находится от линзы на расстоянии $d = 10$ см?

Решение. Предположим, что источник движется в сторону линзы, тогда d уменьшается, а f увеличивается. Пусть за малое время Δt источник переместился на расстояние Δd , а изображение – на расстояние Δf . Запишем формулу линзы для начальных и конечных положений:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \quad \frac{1}{d - \Delta d} + \frac{1}{f + \Delta f} = \frac{1}{F}$$

и вычтем эти уравнения друг из друга. Получим

$$\frac{\Delta d}{d(d - \Delta d)} - \frac{\Delta f}{f(f - \Delta f)} = 0.$$

Пренебрежем Δd и Δf в знаменателе и, разделив на Δt , найдем

$$v_1 = v \frac{f^2}{d^2} = \Gamma^2 v = \left(\frac{F}{d-F} \right)^2 v = 32 \text{ мм/с}.$$

Может показаться удивительным, что скорость увеличивается в Γ^2 раз. Однако это прямо следует из результата, полученного в задаче 11. Действительно, пусть за малое время точка переместилась на малое расстояние Δx . Поскольку в начальной и конечной точках увеличение примерно одинаково и равно Γ , то расстояние между изображениями точек (т.е. перемещение изображения) равно $\Gamma^2 \Delta x$.

Упражнения

1 (ЕГЭ). Линзу, изготовленную из двух тонких сферических стекол одинакового радиуса, между которыми находится воздух (воздушная линза), опустили в воду (рис.24). Как действует эта линза?

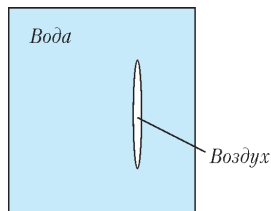


Рис. 24

1) Как собирающая линза; 2) как рассеивающая линза; 3) она не изменяет хода луча; 4) может действовать и как собирающая, и как рассеивающая линза.

2. В отверстие в экране вставлена рассеивающая линза с фокусным расстоянием 10 см, на которую падает параллельный пучок

лучей. На расстоянии 30 см от линзы параллельно ее плоскости расположен экран для наблюдения. При замене рассеивающей линзы собирающей такого же диаметра радиус светлого пятна на экране не изменился. Чему равно фокусное расстояние собирающей линзы?

3. Точечный источник света помещен в фокусе собирающей линзы с фокусным расстоянием 6 см. За линзой на расстоянии 12 см от нее расположен плоский экран, на котором видно круглое светлое пятно. На какое расстояние от фокуса линзы надо переместить вдоль оптической оси источник света, чтобы радиус светлого пятна на экране увеличился в 2 раза?

4. Предмет находится на расстоянии 20 см от собирающей линзы с оптической силой 4 дптр. Найдите расстояние от изображения до предмета.

5. Действительное изображение предмета, полученное с помощью собирающей линзы, находится от нее на расстоянии 8 см. Если собирающую линзу заменить рассеивающей с таким же по величине фокусным расстоянием, то мнимое изображение этого предмета будет отстоять от линзы на 2 см. Найдите абсолютную величину фокусного расстояния линз.

6 (ЕГЭ). На оси x в точке $x_1 = 0$ находится оптический центр тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = -20$ см, а в точке $x_2 = 20$ см – центр тонкой собирающей линзы. Главные оптические оси обеих линз лежат на оси x . На рассеивающую линзу по оси x падает параллельный пучок света из области $x < 0$. Пройдя данную оптическую систему, лучи собираются в точке с координатой $x_3 = 60$ см. Найдите фокусное расстояние собирающей линзы F_2 .

7. Точечный источник света находится на расстоянии 12 см от собирающей линзы с фокусным расстоянием 10 см. За линзой на расстоянии 10 см установлено плоское зеркало, перпендикулярное главной оптической оси линзы. На каком расстоянии от линзы находится изображение, образованное лучами, прошедшими через линзу после отражения от зеркала?

8. Высота изображения человека ростом 160 см на фотопленке равна 2 см. Найдите оптическую силу объектива фотоаппарата, если человек сфотографирован с расстояния 9 м.

9. Линза с фокусным расстоянием 8 см формирует увеличенное в 5 раз действительное изображение предмета. Каким должно быть фокусное расстояние другой линзы, чтобы, поместив ее на место первой, мы получили увеличенное в 5 раз мнимое изображение?

10. Собирающая линза дает изображение некоторого предмета на экране. Высота изображения 9 см. Оставив неподвижными экран и предмет, линзу передвинули к экрану и получили второе четкое изображение высотой 4 см. Найдите высоту предмета.

11 (МФТИ, 2008). Сторона AB квадрата $ABCD$ расположена на оптической оси собирающей линзы, причем расстояние от линзы до точки A в два раза больше фокусного расстояния линзы. Линза создает действительное изображение квадрата. Площадь изображения составляет $3/8$ площади квадрата $ABCD$. С каким увеличением изображается сторона BC ?

12 (ЕГЭ). Небольшой груз, подвешенный на нити длиной 2,5 м, совершает гармонические колебания, при которых его максимальная скорость достигает 0,2 м/с. При помощи собирающей линзы с фокусным расстоянием 0,2 м изображение колеблющегося груза проецируется на экран, расположенный на расстоянии 0,5 м от линзы. Главная оптическая ось линзы перпендикулярна плоскости колебаний маятника и плоскости экрана. Определите максимальное смещение изображения груза на экране от положения равновесия.

13. Собирающую линзу с фокусным расстоянием 10 см перемещают со скоростью 3 мм/с в направлении точечного источника света, находящегося на ее главной оптической оси. С какой скоростью движется изображение в тот момент, когда расстояние между линзой и источником составляет 12 см?

Заключительный этап XXXVII Всероссийской олимпиады школьников по математике

Заключительный этап Всероссийской математической олимпиады прошел с 25 по 29 апреля в Великом Новгороде. Несмотря на финансово-организационные сложности нынешнего года, оргкомитет сумел провести олимпиаду на очень высоком уровне. Состав участников олимпиады формировался по итогам регионального этапа (общероссийский рейтинг), что позволило выступить на заключительном этапе большинству сильнейших юных математиков России: 92 девятиклассникам, 80 десятиклассникам и 74 одиннадцатиклассникам.

Публикуем условия задач и список победителей и призеров заключительного этапа XXXVII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи олимпиады

9 класс

1. Квадратный трехчлен $P(x)$ с единичным старшим коэффициентом таков, что многочлены $P(x)$ и $P(P(x))$ имеют общий корень. Докажите, что $P(0) \cdot P(1) = 0$.

А.Храбров

2. Дан остроугольный треугольник ABC . Окружность, проходящая через вершину B и центр O его описанной окружности, вторично пересекает стороны BC и BA в точках P и Q соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника POQ лежит на прямой AC .

Т.Емельянова, Л.Емельянов

3. На доске нарисован выпуклый 2011-угольник. Петя последовательно проводит в нем диагонали так, чтобы каждая вновь проведенная диагональ пересекала по внутренним точкам не более одной из проведенных ранее диагоналей. Какое наибольшее количество диагоналей может провести Петя?

С.Берлов

4. Существуют ли три взаимно простых в совокупности натуральных числа, квадрат каждого из которых делится на сумму двух оставшихся?

С.Берлов

5. См. задачу M2237 «Задачника «Кванта».

6. У Пети и Коли в тетрадах записаны по два числа; изначально это числа 1 и 2 у Пети, 3 и 4 – у Коли. Раз в минуту Петя составляет квадратный трехчлен $f(x)$, корнями которого являются записанные в его тетради два числа, а Коля составляет квадратный трехчлен $g(x)$, корнями которого являются записанные в его тетради два числа. Если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет два различных корня, то один из мальчиков заменяет свою пару чисел на эти корни, иначе – ничего не происходит. Какое второе число могло оказаться у Пети в тетради в тот момент, когда первое стало равным 5?

И.Богданов, А.Гарбер

7. Пусть ABC – правильный треугольник. На его стороне AC выбрана точка T , а на дугах AB и BC его описанной окружности выбраны точки M и N соответственно так, что $MT \parallel BC$ и $NT \parallel AB$. Отрезки AN и MT пересекаются в точке X , а отрезки CM и NT – в точке Y . Докажите, что периметры многоугольников $AXYC$ и $XMBNY$ равны.

В.Шмаров

8. В некоторых клетках доски 100×100 стоит по фишке. Назовем клетку *красивой*, если в соседних с ней по стороне клетках стоит четное число фишек. Может ли ровно одна клетка доски быть красивой?

К.Кноп

10 класс

1. В каждой клетке таблицы, состоящей из 10 столбцов и n строк, записана цифра. Известно, что для любой строки A и любых двух столбцов найдется строка, отличающаяся от A ровно в этих двух столбцах. Докажите, что $n \geq 512$.

Р.Карасёв

2. См. задачу M2236 «Задачника «Кванта».

3. Назовем компанию *k-неразбиваемой*, если при любом разбиении ее на k групп в одной из групп найдутся два знакомых человека. Дана 3-неразбиваемая компания, в которой нет четырех попарно знакомых человек. Докажите, что ее можно разделить на две компании, одна из которых 2-неразбиваемая, а другая – 1-неразбиваемая.

В.Дольников

4. Периметр треугольника ABC равен 4. На лучах AB и AC отмечены точки X и Y так, что $AX = AY = 1$. Отрезки BC и XY пересекаются в точке M . Докажите, что периметр одного из треугольников ABM и ACM равен 2.

В.Шмаров

5. Даны 10 попарно различных чисел. Для каждой пары данных чисел Вася записал у себя в тетради квадрат их разности, а Петя записал у себя в тетради модуль разности их квадратов. Могли ли в тетрадах у мальчиков получиться одинаковые наборы из 45 чисел?

С.Берлов

6. См. задачу M2238 «Задачника «Кванта».

7. См. задачу M2240 «Задачника «Кванта».

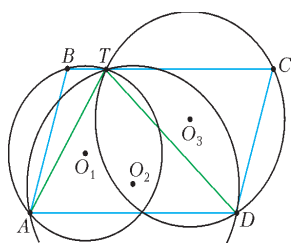
8. См. задачу M2242 «Задачника «Кванта».

11 класс

1. Натуральные числа d и d' , $d' > d$, – делители натурального числа n . Докажите, что $d' > d + \frac{d^2}{n}$.

А.Голованов

2. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ ($\angle A < 90^\circ$) отмечена точка T так, что треугольник ATD – остроуголь-



ный. Пусть O_1 , O_2 и O_3 – центры описанных окружностей треугольников ABT , DAT и CDT соответственно (см. рисунок). Докажите, что точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD .

Т.Емельянова

3. В Академии наук 999 академиков. Каждая научная тема интересует ровно троих академиков, и у каждых двух академиков есть ровно одна тема, интересная им обоим. Докажите, что можно выбрать 250 тем из их общей области научных интересов так, чтобы каждый академик интересовался не более чем одной из них.

А.Магазинов

4. См. задачу M2243 «Задачника «Кванта».

5. Даны два различных кубических многочлена $F(x)$ и $G(x)$ с единичными старшими коэффициентами. Выписали все корни уравнений $F(x) = 0$, $G(x) = 0$, $F(x) = G(x)$. Оказалось, что выписаны 8 различных чисел. Докажите, что наибольшее и наименьшее из них не могут одновременно являться корнями многочлена $F(x)$.

И.Богданов

6. См. задачу M2239 «Задачника «Кванта».

7. Для натурального a обозначим через $P(a)$ наибольший простой делитель числа $a^2 + 1$. Докажите, что существует бесконечно много троек различных натуральных чисел a , b , c таких, что $P(a) = P(b) = P(c)$.

А.Голованов

8. См. задачу M2241 «Задачника «Кванта».

ДИПЛОМАНТЫ ОЛИМПИАДЫ

Диплом победителя

по 9 классам получили

Баев Будимир – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Белов Дмитрий – Набережные Челны, гимназия 26,
Воронецкий Егор – Петрозаводск, школа 42 с углубленным изучением английского языка и математики,
Шабанов Лев – Ангарск, школа 10 с углубленным изучением отдельных предметов,
Волгин Андрей – Москва, гимназия 1543;

по 10 классам –

Ахмедов Максим – Москва, СУНЦ МГУ,
Ишкуватов Руслан – Казань, лицей 131,
Горелов Иван – Москва, школа 25,
Игошина Виктория – Ижевск, ЭМЛ 29,
Крохмаль Николай – Белгород, лицей 38;

по 11 классам –

Цыбышев Алексей – Самара, гимназия 1,
Егоров Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Пахарев Алексей – Москва, СУНЦ МГУ,
Макаров Даниил – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Решетников Иван – Долгопрудный, ФМЛ 5,
Григорьев Михаил – Казань, лицей 131,
Крачун Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239.

Диплом призера

по 9 классам получили

Котельникова Юлия – Москва, гимназия 1543,
Нарышкин Петр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Жевнерчук Антон – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Клюев Даниил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Матушкин Александр – Ижевск, лицей 41,
Турбин Максим – Челябинск, лицей 31,
Африонов Денис – Курган, гимназия 47,
Акбаров Артур – Екатеринбург, политехническая гимназия,
Галимов Тимур – Казань, лицей 131,
Зимин Александр – Ульяновск, школа 52,
Бубнова Анна – Курган, гимназия 19,
Малыгин Виталий – Киров, ФМЛ,
Мокин Александр – Саратов, лицей прикладных наук,
Садыхов Ринат – Казань, лицей им. Н.И.Лобачевского при КГУ,

Зайков Александр – Краснодар, гимназия 36,
Корякин Данил – Киров, ФМЛ,
Латышев Алексей – Киров, ФМЛ,
Рыков Никита – Ангарск, школа 10 с углубленным изучением отдельных предметов,
Дюжев Евгений – Курган, лицей 12,
Крылов Василий – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Одухов Андрей – Курган, лицей 12,
Зуев Антон – Москва, школа 179,
Крачун Владимир – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Яснovidов Григорий – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Карпушкин Данил – Челябинск, лицей 31,
Еськова Елизавета – Белгород, лицей 38,
Крюков Николай – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Сокол Евгений – Челябинск, лицей 31,
Щербakov Артем – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Александров Никита – Набережные Челны, гимназия 26,
Голованов Александр – Казань, лицей им. Н.И.Лобачевского при КГУ,
Горбачев Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Зверев Иван – Москва, школа 853,
Симарова Екатерина – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Смирнова Наталия – Москва, лицей «Вторая школа»,
Струков Георгий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Сурин Михаил – Железнодорожный, гимназия 2,
Хроменков Ярослав – Новороссийск, школа «Личность»,
Целищев Антон – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Горохов Павел – Кострома, лицей 17,
Софронова Алина – Киров, ФМЛ;

по 10 классам –

Деев Родион – Саратов, ФТЛ 1,
Иванов Андрей – Екатеринбург, гимназия 9,
Новиков Владислав – Уфа, лицей 60,
Останин Александр – Ижевск, ЭМЛ 29,
Пышкин Игорь – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Рухович Алексей – Москва, СУНЦ МГУ,
Южаков Александр – Курган, гимназия 31,
Иванов Константин – Москва, школа 25,
Кузин Михаил – Москва, школа 25,
Нурумов Андрей – Москва, СУНЦ МГУ,
Осипов Павел – Томск, школа 54,
Бесман Михаил – Курган, школа 48,

Исхаков Линар – Ижевск, ЭМЛ 29,
 Ненашев Денис – Камчатский край, школа 8 Елизовского
 муниципального района,
 Косинов Никита – Ульяновск, многопрофильный лицей 20,
 Семенов Тимофей – Иркутск, лицей 36 ОАО «Российские
 железные дороги»,
 Рябцева Мария – Москва, СУНЦ МГУ,
 Бусыгин Игорь – Ижевск, ЭМЛ 29,
 Кравцов Дмитрий – Москва, СУНЦ МГУ,
 Салихов Аяз – Казань, лицей 131,
 Александрова Екатерина – Иваново, лицей 33,
 Коротин Александр – Самара, медико-технический лицей,
 Абугалiev Ренат – Самара, медико-технический лицей,
 Лазарев Денис – Долгопрудный, ФМЛ 5,
 Лежнин Михаил – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
 Лопатников Алексей – Москва, СУНЦ МГУ,
 Миронов Максим – Ижевск, ЭМЛ 29,
 Сандрикова Мария – Москва, Центр образования 218,
 Хайруллин Рустэм – Казань, гимназия 7;

по 11 классам –

Бурова Ольга – Москва, лицей «Вторая школа»,
 Малясова Виктория – Москва, СУНЦ МГУ,
 Циглер Александр – Магнитогорск, школа 5 с углубленным
 изучением математики,

Балобанов Арсений – Москва, СУНЦ МГУ,
 Хомутов Никита – Москва, СУНЦ МГУ,
 Миронов Михаил – Москва, Центр образования «Пятьдесят
 седьмая школа»,
 Осипов Матвей – Ульяновск, многопрофильный лицей 20,
 Морозков Алексей – Челябинск, лицей 31,
 Бесман Дмитрий – Москва, СУНЦ МГУ,
 Гонин Роман – Московская обл., Раменское, гимназия,
 Великанов Дмитрий – Москва, СУНЦ МГУ,
 Королев Николай – Казань, лицей им. Н.И.Лобачевского
 при КГУ,
 Мукосеева Екатерина – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
 Чикин Владимир – Нижний Новгород, лицей 36,
 Юркин Виктор – Курган, областной лицей-интернат для
 одаренных детей,
 Ермишкина Екатерина – Москва, гимназия 1543,
 Забиякин Иван – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
 Зайцев Константин – Челябинск, лицей 31,
 Корчемкин Дмитрий – Киров, лицей 21,
 Кунявский Павел – Саратов, ФТЛ 1,
 Минеев Дмитрий – Москва, Центр образования «Пятьдесят
 седьмая школа».

Публикацию подготовили Н.Агаханов, И.Богданов,
 П.Кожевников, О.Подлипский, Д.Терёшин

Заключительный этап XLV Всероссийской олимпиады школьников по физике

Ниже приводятся условия задач теоретического тура и список победителей и призеров олимпиады.

Теоретический тур

9 класс

Задача 1. Спуск по желобу

Небольшое тело отпустили без начальной скорости в некоторой точке M гладкого изогнутого желоба. Оторвав-

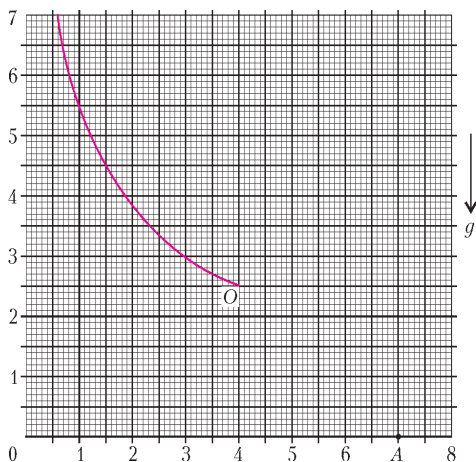


Рис. 1

шись от желоба в точке O , оно упало на пол в точке A (рис. 1). С помощью построений и расчетов покажите на рисунке положение точки M желоба, в которой тело было отпущено. Каково расстояние (в условных единицах) от пола до точки M ? Масштабы по осям рисунка даны в некоторых условных единицах.

И. Воробьев

Задача 2. Шайба и горка

Небольшая шайба, скользящая по гладкой горизонтальной поверхности, наезжает на гладкую горку, покоящуюся на той же поверхности (рис. 2). После того как шайба соскользнула с горки, оказалось, что шайба и горка движутся по гладкой горизонтальной поверхности с одинаковыми по модулю скоростями.

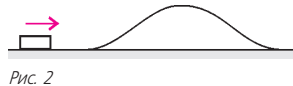


Рис. 2

1) Определите, при каком соотношении масс шайбы и горки это возможно.

2) Найдите отношение максимальной потенциальной энергии, которая была у шайбы во время подъема на горку, к начальной кинетической энергии шайбы.

Примечание. Во время подъема и спуска шайба не отрывается от горки.

А. Шеронов

Задача 3. Циклический теплообмен

Имеются два теплоизолированных сосуда с водой. Теплоемкость всей массы воды в первом сосуде C_1 , ее температура t_1 . Теплоемкость и температура воды во втором сосуде C_2 и

t_2 соответственно. Во втором сосуде кроме воды находится брусок, теплоемкость которого C . Брусок вынимают из второго сосуда и погружают в первый сосуд. После установления теплового равновесия брусок возвращают во второй сосуд. Соотношение между теплоемкостями таково: $C_1 : C_2 : C = 4 : 5 : 1$. Пренебрегая теплообменом с окружающими телами, определите:

- 1) какое минимальное количество таких циклов нужно сделать, чтобы разность температур $(t_2 - t_1)_n$ уменьшилась не менее чем в $N = 25$ раз;
- 2) какая температура воды установится в сосудах после очень большого числа циклов.

С.Козел

Задача 4. Проволочный куб

В семь ребер проволочного куба впаяны одинаковые резисторы сопротивлением R каждый (рис.3). Сопротивления проводников в остальных ребрах пренебрежимо малы. Между клеммами A и B приложено напряжение U .

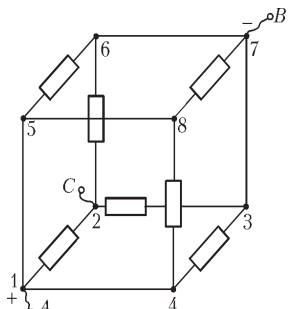


Рис. 3

- 1) Найдите силу тока I_{AB} и сопротивление куба R_{AB} между клеммами A и B .

- 2) Определите, в каком из ребер куба сила тока максимальна и чему она равна.

- 3) Укажите, в каких резисторах выделяется максимальная тепловая мощность и чему она равна.

- 4) Пусть теперь напряжение U приложено между клеммами A и C . Определите силу тока I_{AC} и сопротивление R_{AC} .

М.Замятин

Задача 5. Составной цилиндр

Цилиндр составлен из двух сочлененных отрезков труб и закреплен так, что его ось симметрии вертикальна. Снизу к цилиндру прижата заслонка, которая полностью закрывает первую трубу. Чтобы удерживать заслонку в прижатом состоянии, к ней снизу нужно прикладывать силу $F \geq F_0$. После того как в цилиндр налили V_0 литров воды, минимальная сила, необходимая для удержания заслонки в прижатом состоянии, возросла в два раза. Когда в цилиндр налили еще V_0 литров воды, минимальная сила возросла еще в два раза. Наконец, когда в цилиндр добавили $V_0/3$ литров воды, минимальная сила возросла еще на F_0 , а цилиндр оказался полностью заполнен.

- 1) Вычислите отношение $S_1 : S_2$ площадей нижней и верхней труб.

- 2) Вычислите отношение $L_1 : L_2$ длин нижней и верхней труб.

С.Варламов

10 класс

Задача 1. Шарик в сосуде с водой

Деревянный и металлический шарики связаны нитью и прикреплены одной нитью ко дну сосуда с водой. Сосуд вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси OO' . В результате шарики, оставаясь полностью в воде, расположились так, как показано на рисунке 4. Деревянный шарик 1 находится от оси вращения на расстоянии втрое меньшем, чем металлический шарик 2. Верхняя нить составляет угол α ($\sin \alpha = 4/5$) с вертикалью. Угол

между нитями равен 90° . Размеры шариков малы по сравнению с их расстояниями до оси вращения.

- 1) Под каким углом к вертикали направлена сила Архимеда, действующая на деревянный шарик? Дайте объяснение.

- 2) Найдите отношение сил натяжения верхней и нижней нитей.

В.Чивилёв

Задача 2. Тепловая машина

Гигантский айсберг массой $m = 9 \cdot 10^8$ кг (куб $100 \times 100 \times 100$ м), имеющий температуру $T_2 = 273$ К, дрейфует в течении Гольфстрим, температура воды которого $T_1 = 295$ К.

- 1) Пренебрегая прямым теплообменом между айсбергом и теплой водой, найдите максимальную работу тепловой машины (рис.5), использующей Гольфстрим в качестве

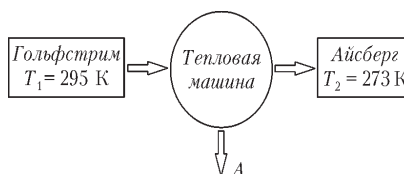


Рис. 5

нагревателя и айсберг в качестве холодильника, за то время, пока весь айсберг не растает.

- 2) Определите, сколько воды можно испарить в котле за счет работы, найденной в первом пункте, если использовать ее в тепловом насосе (рис.6) для «перекачки» тепловой

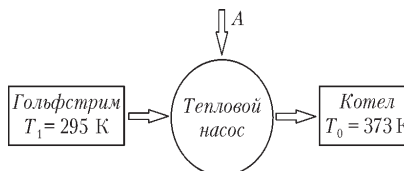


Рис. 6

энергии из течения Гольфстрим в котел с температурой $T_0 = 373$ К.

Удельная теплота плавления льда $q = 3,35 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота испарения воды

$$\lambda = 2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}.$$

Э.Прут

Задача 3. Адиабатический процесс

В цилиндрическом сосуде объемом $2V_0$ под тяжелым поршнем находится одноатомный идеальный газ при температуре T_0 и давлении $p_0/2$, занимающий объем V_0 . Над поршнем вакуум. Внизу в сосуде имеется небольшое отверстие, перекрытое краном. Снаружи пространство заполнено тем же газом при давлении p_0 и температуре T_0 . Сосуд теплоизолирован. Кран приоткрывают так, что поршень медленно поднимается вверх, и после того, как давления внутри и снаружи выравняются, кран закрывают. Определите температуру газа после закрытия крана.

А.Анолинский

Задача 4. Слоистый диэлектрик

Плоский конденсатор с расстоянием между обкладками d подсоединен к источнику постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E}$ (рис. 7).

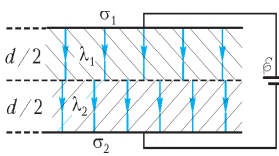


Рис. 7

Конденсатор заполнен двумя слоями слабопроводящих сред с разными значениями проводимости λ_1 и λ_2 . Оба слоя находятся в электрическом контакте между собой и с пластинами конденсатора, толщина каждого слоя $d/2$, диэлектрическая проницаемость обоих слоев $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$. Найдите:

1) поверхностные плотности σ_1 и σ_2 зарядов на пластинах конденсатора;

2) поверхностную плотность σ заряда в плоскости контакта слоев.

Примечание. Удельная проводимость – это величина, обратная удельному сопротивлению: $\lambda = 1/\rho$.

М.Проскурин

Задача 5. Перезарядка конденсаторов

Имеются два заряженных конденсатора емкостями $C_1 = 18$ мкФ и $C_2 = 19$ мкФ. Напряжения на конденсаторах равны $U_1 = 76$ В и $U_2 = 190$ В соответственно. Третий конденсатор с неизвестной емкостью C подсоединен к конденсатору емкостью C_2 (рис. 8). Ключ K перекидывают из правого положения в левое, а после перезарядки конденсаторов возвращают в исходное положение. Известно, что после выполнения 44 таких циклов разность напряжений $(U_2 - U_1)_{44}$ составила 1% от первоначальной разности $(U_2 - U_1)_0$.

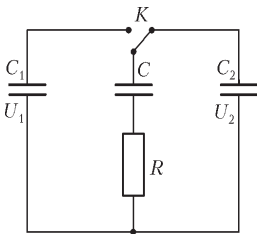


Рис. 8

1) Чему равна емкость C ?

2) Какое напряжение U_∞ установится на конденсаторах после большого числа циклов?

3) Какая тепловая энергия выделится на резисторе R после большого числа циклов?

С.Козел

11 класс

Задача 1. Трифилярный маятник

Массивное кольцо подвешено на трех тонких вертикальных нитях длиной L каждая (рис. 9).

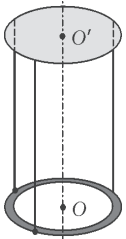


Рис. 9

1) Определите период малых крутильных колебаний кольца относительно оси OO' .

2) На сколько изменится период крутильных колебаний, если в центре кольца (точка O) при помощи легких спиц расположить тело малых размеров (материальную точку), масса которого равна массе кольца?

Указание. При $\alpha \ll 1$ можно использовать приближенное выражение $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$.

С.Козел

Задача 2. Заряженная частица в соленоиде

На рисунке 10 изображено сечение длинной прямой катушки (соленоида), радиус витков которой $r = 10$ см. Число витков катушки на 1 метр длины равно $n = 500$ м⁻¹. По

виткам катушки протекает постоянный ток $I = 0,1$ А (по часовой стрелке). Через зазор между витками в точке A в катушку влетает заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U = 10^3$ В. Скорость частицы в точке A направлена вдоль радиуса соленоида. Частица движется внутри соленоида в плоскости, перпендикулярной его оси, и вылетает из соленоида в точке C , расположенной под углом $\alpha = 60^\circ$ к первоначальному направлению движения. Определите:

- 1) знак заряда частицы;
- 2) радиус кривизны траектории частицы внутри соленоида;
- 3) удельный заряд частицы (т.е. отношение модуля заряда частицы к ее массе).

Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

С.Козел

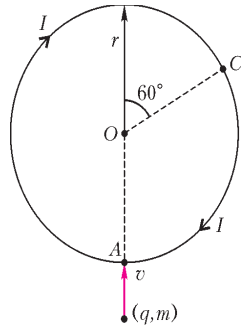


Рис. 10

Задача 3. Устойчивость поршня

Закрытый снизу тонкостенный цилиндр длиной $L = 1,50$ м установлен вертикально. В верхней части он соединен с другим цилиндром, значительно большим по диаметру (рис. 11). В нижнем цилиндре на расстоянии $h_1 = 380$ мм от верхнего края расположен тонкий легкий поршень. Над поршнем находится слой ртути высотой $h_1 + \Delta h$, где $\Delta h \ll h_1$, ниже поршня – гелий под давлением $p_1 = p_0 + \rho_p g h_1$, где $p_0 = 760$ мм рт.ст. – атмосферное давление, $\rho_p = 13,6$ г/см³ – плотность ртути. Из-за большой разницы диаметров цилиндров изменением Δh можно пренебречь при смещениях поршня по всей длине нижнего цилиндра. Из условия задачи следует, что поршень находится в равновесии. Является ли это положение равновесия устойчивым? Существуют ли другие положения равновесия? Если есть, то при каких расстояниях h_i от поршня до верхнего края? Являются ли эти положения равновесия устойчивыми? Можно считать, что при малых изменениях объема под поршнем температура гелия остается постоянной.

Рис. 11

С.Кармазин

Задача 4. Конденсатор с утечкой

Плоский конденсатор емкостью C_0 заполнен слабопроводящей слоистой средой с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 1$, удельное сопротивление которой зависит от расстояния x до одной из пластин по закону $\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{2x}{d}\right)$, где d – расстояние между пластинами конденсатора. Конденсатор подключен к батарее с напряжением U_0 (рис. 12). Найдите:

- 1) силу тока, протекающего через конденсатор;
- 2) заряды нижней (q_1) и верхней (q_2) пластин конденсатора;

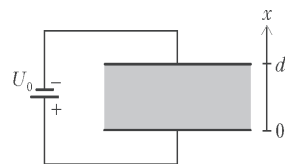


Рис. 12

3) заряд q внутри конденсатора (т.е. в среде между пластинами);

4) электрическую энергию W_3 , запасенную в конденсаторе.

М.Проскурин

Задача 5. Плоский световод

Вблизи левого торца хорошо отполированной прозрачной пластины, показатель преломления которой n , расположен точечный источник света S (рис.13). Толщина пластины $H = 1$ см, ее длина $L = 100$ см. Свет от источника падает на левый торец пластины под всевозможными углами падения ($0 - 90^\circ$). В глаз наблюдателя попадают как прямые лучи от источника, так и лучи, многократно испытавшие полное отражение на боковых гранях пластины.

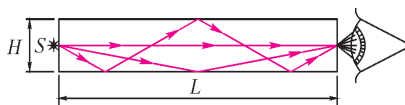


Рис 13

1) Какое максимальное число отражений может испытать луч от источника, выходящий через правый торец пластины? Решите задачу для двух значений коэффициента преломления: $n_1 = 1,73$; $n_2 = 1,3$.

2) Укажите, в каком из этих двух случаев свет частично выходит из пластины через боковые грани.

С.Козел

ДИПЛОМАНТЫ ОЛИМПИАДЫ

Диплом победителя

по 9 классам получили

Денисов Артем – Владивосток, школа 23,
Дегтяренко Антон – Владивосток, школа 48,
Маслов Иван – Челябинск, лицей 31,
Великанов Максим – Екатеринбург, СУНЦ,
Кошелев Ярослав – Снежинск, гимназия 127,
Блинов Роман – Вологда, многопрофильный лицей;

по 10 классам –

Вартамян Надежда – Смоленск, педагогический лицей-интернат имени Кирилла и Мефодия,
Бушмин Иван – Долгопрудный, гимназия 12,
Гинзбург Лев – Москва, СУНЦ МГУ,
Ивашковский Иван – Москва, лицей 1581,
Приходько Иван – Москва, гимназия 1567,
Френклах Давид – Долгопрудный, лицей 5;

по 11 классам –

Паринов Данила – Москва, СУНЦ МГУ,
Аниксин Евгений – Москва, Центр образования «Пятьдесят седьмая школа»,
Арзамасский Лев – Калининград, лицей 23,
Сопенко Никита – Тамбов, лицей 14.

Диплом призера

по 9 классам получили

Агафонов Александр – Пермь, школа 146,
Бурдина Анастасия – Пермь, школа 146,
Данько Алексей – Воронеж, лицей 1,
Дидин Максим – Переславль-Залесский, гимназия,
Лебедев Роман – Бийск, лицей-интернат,
Кондратьев Артем – Ижевск, лицей 29,
Фасалов Андрей – Магнитогорск, школа 5,
Ключиков Евгений – Владивосток, школа 23,
Подлесный Максим – Дубна, лицей «Дубна»,
Вишняков Павел – Москва, школа 2007,
Малахов Артем – Курск, школа 6,
Ленков Григорий – Сосновый Бор, лицей 8,
Мажник Ефим – Барнаул, гимназия 22,
Хабаров Максим – Санкт-Петербург, физико-математический лицей 30,
Капцан Арсентий – Магнитогорск, школа 5,
Пещеренко Николай – Пермь, школа 146,
Шевнин Дмитрий – Киров, физико-математический лицей,
Корякин Илья – Новосибирск, лицей 130 имени академика М.А.Лаврентьева,
Краскевич Игорь – Москва, лицей 1568,

Савищев Дмитрий – Москва, школа 463 имени Героя Советского Союза Д.Н.Медведева,

Туманов Владислав – Новосибирск, лицей 130 имени академика М.А.Лаврентьева,

Абубакиров Денис – Петропавловск-Камчатский, школа 33,
Поздняков Сергей – Москва, школа 1189,

Моклев Вячеслав – Ленинградская обл., Коммунарская школа 1,

Погодаев Леонид – Раменское, гимназия,

Серов Юрий – Санкт-Петербург, лицей «Физико-техническая школа»,

Табачников Эдуард – Рязань, школа 44;

по 10 классам –

Крошинин Алексей – Архангельск, лицей 17,

Жукова Мария – Бийск, лицей-интернат,

Слободсков Игорь – Юбилейный, гимназия 3,

Васильева Александра – Москва, лицей «Вторая школа»,

Евсеев Олег – Москва, лицей «Вторая школа»,

Логинов Николай – Саров, лицей 15,

Млодик Михаил – Нижний Новгород, лицей 40,

Мосиевский Анатолий – Бийск, лицей-интернат,

Погорелов Иван – Москва, гимназия 1514,

Красник Павел – Бийск, лицей-интернат,

Седов Александр – Ульяновск, лицей 40,

Фещенко Илья – Москва, школа 1189,

Широбоков Михаил – Архангельск, лицей имени М.В.Ломоносова,

Зыков Никита – Озерск, лицей 39,

Терехов Антон – Санкт-Петербург, физико-математический лицей 239,

Ширкин Михаил – Раменское, гимназия,

Кибкало Владислав – Саров, гимназия 2,

Кулеш Иван – Псков, технический лицей,

Меняйлов Михаил – Жуковский, лицей 14,

Никитин Денис – Санкт-Петербург, физико-математический лицей 239,

Козлов Даниил – Иркутск, лицей 2,

Лисицын Сергей – Озерск, лицей 39,

Гальковский Егор – Санкт-Петербург, лицей 533,

Маслов Артем – Санкт-Петербург, лицей «Физико-техническая школа»,

Поляков Георгий – Белгород, лицей 38,

Силин Игорь – Пермь, школа 146,

Виноходов Егор – Санкт-Петербург, лицей «Физико-техническая школа»,

Дедович Сергей – Дубна, лицей «Дубна»,

Лялин Феликс – Югра, гимназия,

Маракулин Роман – Киров, физико-математический лицей,

О Л И М П И А Д Ы

Соболев Константин – Киров, физико-математический лицей;

по 11 классам –

Асташкин Роман – Королев, лицей научно-инженерного профиля,

Билинский Юрий – Белебей, гимназия 1,

Перепечкин Илья – Москва, СУНЦ МГУ,

Грингауз Александр – Москва, лицей 1557,

Астраханцев Никита – Красноярск, лицей 102 имени академика М.Ф.Решетнёва,

Започкин Андрей – Саров, лицей 15,

Голоколенов Илья – Югра, физико-математический лицей-интернат,

Заливако Илья – Москва, лицей 1523,

Ноян Алексей – Москва, Центр образования 654 имени А.Д.Фридмана,

Цыбров Федор – Сыктывкар, гимназия 1,

Декань Валентин – Тверь, школа 20,

Лучников Илья – Киров, лицей 21,

Радкевич Алексей – Москва, гимназия 1534,

Чурилов Антон – Ефремов, физико-математический лицей,

Шель Егор – Москва, СУНЦ МГУ,

Гонин Роман – Раменское, гимназия,

Костарев Виталий – Снежинск, гимназия 127,

Прокофьев Вадим – Рязань, школа 3,

Семенов Владимир – Вологда, многопрофильный лицей,

Ушаков Александр – Королев, лицей научно-инженерного профиля,

Авдеев Иван – Санкт-Петербург, лицей «Физико-техническая школа»,

Бегун Александр – Владивосток, школа 35,

Головешкин Александр – Москва, лицей 1303,

Кулагин Антон – Томск, лицей при ТПУ,

Козлов Иван – Москва, лицей «Вторая школа»,

Паньков Александр – Пермь, школа 9 имени А.С.Пушкина.

Публикацию подготовили

С.Козел, В.Слободянин

LII Международная математическая олимпиада

LII Международная математическая олимпиада прошла с 13 по 24 июля 2011 года в столице Нидерландов городе Амстердаме. Она запомнилась участникам великолепной организацией, интересными экскурсиями, яркими и необычными церемониями открытия и закрытия и, конечно, трудными и интересными задачами. Олимпиада стала одной из самых представительных в истории ММО: в ней приняли участие более 550 участников из более 100 стран мира.

В команду России вошли четверо выпускников: *Ольга Бурова* из Москвы (лицей «Вторая школа»), *Дмитрий Егоров* из Санкт-Петербурга (ФМЛ 239), *Алексей Пахарев* из Ульяновска (СУНЦ МГУ), *Александр Циглер* из Магнитогорска (школа 5), десятиклассник *Михаил Григорьев* из Казани (лицей 131) и девятиклассник *Дмитрий Крачун* из Санкт-Петербурга (ФМЛ 239). Состав команды был достаточно ровный, что и подтвердили результаты олимпиады. Наша сборная завоевала 2 золотых и 4 серебряных медали и традиционно вошла в число лучших команд мира.

Как и в прошлом году, подготовка команды России к ММО завершалась на летних учебно-тренировочных сборах, проходивших с 19 июня по 12 июля в детском лагере «КОМПЬЮТЕРИЯ» (Тверская область). Пользуясь случаем, выражаем благодарность руководству лагеря и персонально *А.А.Андрееву* за обеспечение наиболее благоприятных условий для организации сборов. Большой вклад в успешное выступление команды внесли преподаватели сборов: аспирант Института системного анализа к.ф.-м.н. *А.В. Аколян*, педагог ФМЛ 239 Санкт-Петербурга к.ф.-м.н. *С.Л. Берлов*, младший научный сотрудник, преподаватель МГУ и МФТИ к.ф.-м.н. *А.И. Гарбер*, сотрудник университета Браунсвилль к.ф.-м.н. *А.А.Глазырин*, педагог дополнительного образования Санкт-Петербурга *А.С. Голованов*, профессор Ярославского государственного университета д.ф.-м.н. *В.Л. Дольников*, аспирант Ярославского государственного университета *Г.Р.Челноков*.

Публикуем результаты выступления команды России (каждая задача оценивалась из 7 баллов). Подробную информацию о результатах на международных математических олим-



Команда России на LII Международной математической олимпиаде. Слева направо: М.Григорьев, О.Бурова, А.Циглер, А.Пахарев, Д.Крачун. Д.Егоров не принял участие в торжественном закрытии – ему пришлось уехать раньше, чтобы участвовать в Международной олимпиаде по информатике

пиадах можно найти на официальном сайте олимпиады www.imo-official.com.

Участник	Баллы по задачам						Сумма баллов	Медаль
	1	2	3	4	5	6		
Бурова								
Ольга	7	1	2	7	7	1	25	серебряная
Егоров								
Дмитрий	7	4	1	7	7	0	26	серебряная
Григорьев								
Михаил	7	1	7	7	7	1	30	золотая
Крачун								
Дмитрий	7	1	3	7	7	1	26	серебряная

Участник	Баллы по задачам						Сумма баллов	Медаль
	1	2	3	4	5	6		
Пахарев								
Алексей	7	1	7	5	7	1	28	золотая
Циглер								
Александр	7	2	3	7	7	0	26	серебряная

Руководители команды благодарны *Д.Ю.Дойхену*, много лет оказывающему содействие в подготовке и участии команды России в международных математических соревнованиях.

Задачи олимпиады

1. Для множества $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, состоящего из четырех попарно различных целых положительных чисел, обозначим через s_A сумму $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Через n_A обозначим количество пар индексов (i, j) , $1 \leq i < j \leq 4$, для которых s_A делится на $a_i + a_j$. Найдите все множества A , состоящие из четырех попарно различных целых положительных чисел, для которых n_A принимает наибольшее возможное значение.

Мексика

2. См. задачу M2245,а «Задачника «Кванта».

3. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, определенная на множестве действительных чисел и принимающая действительные значения, такая, что $f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$ для всех действительных x и y . Докажите, что $f(x) = 0$ для всех $x \leq 0$.

Белоруссия

4. Дано целое число $n > 0$. Имеются чашечные весы и n гирь, веса которых равны $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$. Все n гирь выкладываются одна за другой на чаши весов, т.е. на каждом из n шагов выбирается гиря, которая еще не выложена на весы, и добавляется либо на левую, либо на правую чашу весов; при этом гири выкладываются так, чтобы ни в какой момент правая чаша не была тяжелее левой. Найдите количество способов выполнить такую последовательность шагов.

Иран

5. Пусть f – функция, определенная на множестве целых чисел, принимающая целые положительные значения. Известно, что для любых целых m и n разность $f(m) - f(n)$ делится на $f(m-n)$. Докажите, что для любых целых m и n таких, что $f(m) \leq f(n)$, число $f(n)$ делится на $f(m)$.

Иран

6. Пусть ABC – остроугольный треугольник, и Γ – описанная около него окружность. Пусть прямая l – некоторая касательная к окружности Γ , и пусть l_a , l_b и l_c – прямые, симметричные прямой l относительно прямых BC , CA и AB соответственно. Докажите, что окружность, описанная около треугольника, образованного прямыми l_a , l_b и l_c , касается окружности Γ .

Япония

Публикацию подготовили руководители команды России на ЛII ММО Н.Азаханов, П.Кожевников, М.Пратусевич, Д.Терёшин

XLII Международная физическая олимпиада

В 2011 году Международная физическая олимпиада школьников проходила в Таиланде с 10 по 18 июля. На олимпиаду приехали 380 школьников из 84 стран мира.

На олимпиаде Россию представляли:

Арзамасский Лев — Калининград, лицей 23, учителя физики Борониллов Борис Анатольевич и Пец Александр Васильевич,

Сопенко Никита — Тамбов, лицей 14, учитель физики Бирюков Валерий Владимирович,

Паринов Данила — Воронеж, гимназия 9, затем СУНЦ МГУ, учителя физики Голубков Андрей Александрович и Лукьянов Илья Владимирович (СУНЦ МГУ),

Шель Егор — Тюмень, школа 29, затем СУНЦ МГУ, учителя физики Голубков Андрей Александрович и Лукьянов Илья Владимирович (СУНЦ МГУ),

Асташкин Роман — Королев Московской обл., лицей научно-инженерного профиля, учитель физики Третьякова Галина Сергеевна.

Руководителями нашей команды были Станислав Минович Козел и Валерий Павлович Слободянин.

По традиции, участникам олимпиады было предложено решить три теоретические задачи и выполнить два экспериментальных задания. Как и в прошлые годы, лидерство захватили команды, представляющие страны юго-восточной Азии: Тайвань, Китай, Сингапур, Корея (южная). В нашей команде расклад по медалям в точности совпал с результатами прошлого года — одна золотая, три серебряные и одна бронзовая медали. Члены сборной команды России показа-

ли следующие результаты:

Участник команды	Медаль
Арзамасский Лев	золотая
Сопенко Никита	серебряная
Паринов Данила	серебряная
Шель Егор	серебряная
Асташкин Роман	бронзовая

Ниже приводятся условия задач теоретического тура олимпиады.

Теоретический тур

Задача 1. Проблема трех тел и LISA

1.1. Два тела с массами M и m движутся по круговым орбитам с радиусами R и r соответственно вокруг общего центра масс. Выразите угловую скорость вращения ω_0 отрезка, соединяющего тела, через R , r , M , m и гравитационную постоянную G . (1,5 балла)

1.2. Третье тело с пренебрежимо малой массой μ вращается в той же плоскости

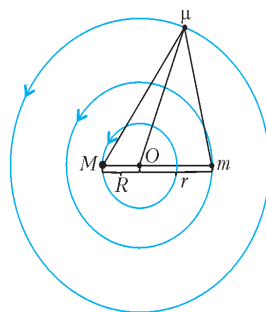


Рис.1. Концентрические орбиты трех тел в одной плоскости

по круговой орбите вокруг того же центра масс так, что остается неподвижным относительно тел с массами M и m (рис.1). Считайте, что третье тело не лежит на прямой, соединяющей первые два тела. Выразите следующие параметры через R и r : расстояние r_1 от третьего тела (μ) до первого тела (M); расстояние r_2 от третьего тела (μ) до второго тела (m); расстояние ρ от третьего тела (μ) до центра масс системы. (3,5 балла)

1.3. Рассмотрите случай $M = m$. Тело массой μ выводят из положения равновесия в радиальном направлении (вдоль радиуса). Выразите циклическую частоту радиальных колебаний этого тела через ω_0 . Считайте, что момент импульса тела массой μ не изменяется. (3,2 балла)

Лазерная интерферометрическая космическая антенна LISA (Laser Interferometry Space Antenna) представляет собой три одинаковых космических аппарата и предназначена для детектирования низкочастотных гравитационных волн. Каждый из аппаратов располагается в вершине равностороннего треугольника, как показано на рисунках 2 и 3. Длина сторон

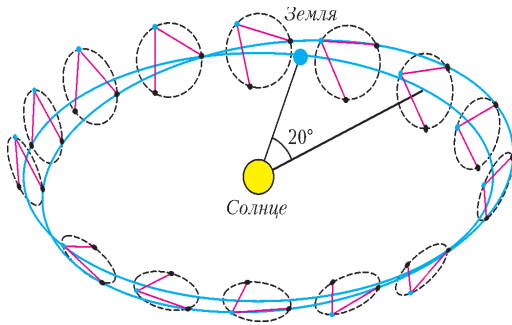


Рис.2. Изображение орбиты LISA. Три аппарата вращаются с периодом 1 год. Угол Земля–Солнце–LISA составляет 20°

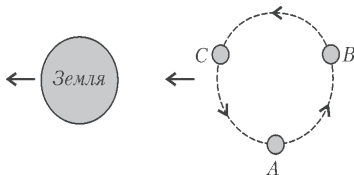


Рис.3. Увеличенное изображение трех аппаратов LISA, двигающихся вслед за Землей; А, В и С — три аппарата, находящиеся в вершинах равностороннего треугольника

треугольника — плеч интерферометра — около 5,0 млн км. Система LISA находится на земной орбите так, что угол Земля–Солнце–LISA составляет 20° . Каждый аппарат движется по слегка наклоненной орбите вокруг Солнца. Фактически в системе отсчета, связанной с LISA, аппараты вращаются вокруг центра антенны с периодом 1 год.

Аппараты непрерывно посылают лазерные сигналы друг другу и принимают их. Таким образом они детектируют гравитационные волны, измеряя небольшие изменения длин плеч интерферометра интерференционным методом. Столкновение массивных объектов, таких как черные дыры, в соседних галактиках является источником гравитационных волн.

1.4. Определите относительную скорость движения одного из аппаратов относительно другого в плоскости LISA. (1,8 балла)

Задача 2. Заряженный мыльный пузырь

Сферический мыльный пузырь радиусом R_0 , наполненный воздухом с плотностью ρ_1 при температуре T_1 , находит-

ся в воздухе с плотностью ρ_2 при температуре T_2 и атмосферном давлении p . Мыльная пленка характеризуется поверхностным натяжением σ , плотностью ρ и толщиной l . Поверхностное натяжение и масса мыльной пленки не изменяются с температурой. Считается, что $R_0 \gg l$.

Увеличение энергии dE , требуемое для увеличения площади поверхности границы между мыльной пленкой и воздухом на величину dS , дается соотношением $dE/dS = \sigma$, где σ — поверхностное натяжение пленки.

2.1. Запишите отношение $\rho_1 T_1 / \rho_2 T_2$ через σ , p и R_0 . (1,7 балла)

2.2. Найдите численное значение величины $(\rho_1 T_1 / \rho_2 T_2) - 1$, используя значения $\sigma = 0,0250$ Н/м, $R_0 = 1,00$ см и $p = 1,013 \cdot 10^5$ Н/м². (0,4 балла)

2.3. Воздух внутри пузыря первоначально теплее атмосферного. Найдите значение минимальной температуры $T_{1\min}$, необходимой для того, чтобы пузырь мог парить в воздухе не падая. Используйте значения $T_2 = 300$ К, $p = 1000$ кг/м³, $\rho_2 = 1,3$ кг/м³, $l = 100$ нм и $g = 9,80$ м/с². (2,0 балла)

Через некоторое время после образования мыльного пузыря установится тепловое равновесие между ним и окружающим воздухом. Поэтому в неподвижном воздухе мыльный пузырь опустится на землю.

2.4. Найдите минимальную скорость u поднимающегося вверх воздуха, при которой мыльный пузырь, находящийся в тепловом равновесии с воздухом, не опускается. Выразите ответ через ρ , R_0 , g , l и коэффициент вязкости воздуха η . Сила сопротивления определяется законом Стокса: $F = 6\pi\eta R_0 u$. (1,6 балла)

2.5. Рассчитайте численно величину u , используя значение $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с). (0,4 балла)

Проведенные расчеты показывают, что слагаемые, включающие поверхностное натяжение σ , не оказывают существенного влияния на результат. Поэтому во всех последующих пунктах поверхностным натяжением можно пренебречь.

2.6. Предположим теперь, что пузырь заряжен равномерно с общим зарядом q . Выведите уравнение для определения радиуса R_1 пузыря после его зарядки через R_0 , p , q и электрическую постоянную ϵ_0 . (2,0 балла)

2.7. Предположим, что заряд пузыря q не очень велик ($q^2 / (\epsilon_0 R_0^4) \ll p$), так что зарядка пузыря увеличивает его радиус на малую величину ΔR ($\Delta R = R_1 - R_0$). Найдите ΔR . Известно, что $(1+x)^n \approx 1+nx$ при $x \ll 1$. (0,7 балла)

2.8. Найдите такой заряд q , выраженный через l , ρ_2 , ρ , ϵ_0 , R_0 , p , при котором пузырь будет неподвижно висеть в воздухе. Вычислите величину этого заряда. Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. (1,2 балла)

Задача 3. Рассеяние иона на нейтральном атоме (в честь столетия модели атома Резерфорда)

Ион массой m и зарядом Q движется с начальной скоростью v_0 из бесконечности к окрестности нейтрального атома массой $M \gg m$ и электрической поляризуемостью α . Прицельный параметр равен b (рис.4). Атом мгновенно поляри-

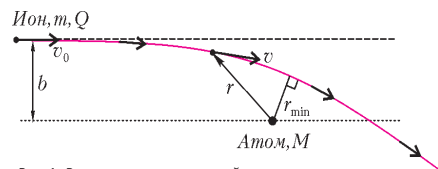


Рис.4. Рассеяние иона на нейтральном атоме

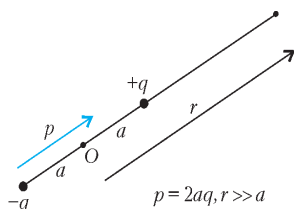


Рис.5. Дипольный момент поляризованного атома

с дипольным моментом $\vec{p}$, расположенного в начале координат (точка O на рисунке 5). (1,2 балла)

3.2. Найдите выражение для силы $\vec{f}$, действующей на ион со стороны поляризованного им атома. Покажите, что эта

зудется электрическим полем $\vec{E}$ приближающегося иона. В результате у него появляется электрический дипольный момент $\vec{p} = \alpha \vec{E}$. Релятивистские эффекты не учитывайте.

3.1. Рассчитайте напряженность E_p электрического поля на расстоянии r на оси диполя

сила есть сила притяжения независимо от знака заряда иона. (3,0 балла)

3.3. Найдите электрическую потенциальную энергию взаимодействия атома и иона, выразив ее через α , Q и r . (0,9 балла)

3.4. Получите выражение для минимального расстояния $r_{\min}$ между ионом и атомом (см. рис. 4). (2,4 балла)

3.5. Если прицельный параметр b меньше критического значения b_0 , то ион упадет по спиральной траектории на атом. В этом случае ион окажется нейтрализованным, а атом – заряженным. Этот процесс известен как «перезарядка». Чему равна площадь сечения $S = \pi b_0^2$ этой перезарядки атома «с точки зрения» налетающего иона? (2,5 балла)

Публикацию подготовили
С.Козел, В.Слободянин

Всероссийская студенческая олимпиада по физике 2011 года

Заключительный тур Всероссийской физической олимпиады студентов технических вузов прошел 15 ноября 2011 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э. Баумана.

По результатам олимпиады в командном зачете первое место заняла команда Санкт-Петербургского государственного политехнического университета (СПГПУ), набравшая 120 баллов, второе место заняла команда Национального исследовательского технологического университета (НИТУ) «МИСиС» (59 баллов), третье место — команда Московского института электронной техники (53 балла).

Победителями в личном зачете стали Антон Соболев (СПГПУ) — первое место, Петр Кравчук (СПГПУ) — второе место, Петр Карпов (НИТУ «МИСиС») — третье место.

Задачи олимпиады

1. Ракета A и цель B движутся с постоянными по модулю скоростями v и u соответственно ($v > u$). Цель B уходит от ракеты, сохраняя угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{v}$ равным α . Определите скорость столкновения ракеты и цели, если известно, что максимальное ускорение, которое может развить ракета, равно a , а ее траектория выбирается из условия минимального времени.

2. Космическое тело массой M движется вокруг Земли по круговой орбите с первой космической скоростью v_0 . Тело при взрыве разваливается на две части, массы которых относятся как 1:2. Определите минимальный импульс силы, получаемый каждой частью при взрыве, необходимый для того, чтобы обе части удалились от Земли на бесконечность.

3. Сплошной цилиндр, двигаясь по горизонтальной поверхности, накатывается со скоростью v_0 на наклонную плоскость с углом наклона α . Определите, на какую высоту закатится цилиндр, если проскальзывание отсутствует, а удар о наклонную плоскость абсолютно неупругий.

4. Сосуд квадратного сечения размером $L \times L$ заполнен водой до высоты H и накрыт сверху металлическим поршнем массой m . На противоположных стенках сосуда проложены вертикальные токоподводящие шины, касающиеся поршня. Сосуд находится в однородном магнитном поле, индукция

которого равна B и перпендикулярна плоскости, образованной шинами. К шинам подключен внешний источник тока с ЭДС, равной $\mathcal{E}$. Определите затраты энергии в источнике при полном вытеснении воды через отверстие в дне сосуда сечением s . Магнитным полем возникающих токов пренебречь.

5. Полный термодинамический цикл, совершаемый с одноатомным газом, состоит из изотермы 1–2, изобары 2–3, изотермы 3–4 и изобары 4–1. Точки 1 и 3 находятся на адиабате. Определите КПД цикла, если известно, что максимальное давление отличается от минимального в n раз.

6. Два соосных одинаково ориентированных бесконечных конуса с полууглом при вершине δ заряжены равномерно по поверхности зарядами противоположных знаков с поверхностной плотностью $\pm\sigma$. Найдите распределение электрического поля на оси системы, если конусы сдвинуты относительно друг друга на расстояние a .

7. Сплошной металлический шар радиусом R разделен по диаметральной плоскости пополам, и половинки изолированы друг от друга тонким слоем диэлектрика. Определите силу взаимодействия между половинками, если они заряжены зарядами q и Q .

8. Заряд q массой m летит в плоскости симметрии, перпендикулярной оси магнитного диполя p , со скоростью v

на расстоянии $r \gg \sqrt{\frac{\mu_0 q p}{4\pi m v}}$. Определите момент импульса заряда относительно оси диполя, если известно, что возможен захват заряда магнитным полем диполя на круговую орбиту.

9. Расстояние между точечным источником монохроматического света с длиной волны λ и точкой наблюдения P равно l . На каком расстоянии от источника следует поместить непроницаемый экран с отверстием радиусом $r = \sqrt{\frac{2l\lambda}{9}}$,

чтобы интенсивность света в точке наблюдения была максимальной?

Публикацию подготовили
В.Голубев, В.Глушков

Очередной набор в ОЛ ВЗМШ

Открытый лицей «Всероссийская заочная многопредметная школа» (ОЛ ВЗМШ) Российской академии образования, работающий при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, в сорок восьмой раз проводит набор учащихся.

ОЛ ВЗМШ – государственное учреждение дополнительного образования, причем не только для школьников. «ОТКРЫТЫЙ» – значит доступный для всех желающих пополнить свои знания в одной или нескольких из следующих областей науки: математика, биология, филология, физика, экономика, химия, правоведение, история (перечисление – в хронологическом порядке открытия отделений).

Сейчас ОЛ ВЗМШ совместно с другими научно-педагогическими учреждениями ведет исследовательские работы по разработке новых интерактивных технологий в образовании и переводу части своих учебно-методических комплексов на язык современных телекоммуникаций, в частности – по организации Интернет-отделения ОЛ ВЗМШ.

За время существования ВЗМШ удостоверения о ее окончании получили несколько сотен тысяч школьников и тысячи кружков – групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Обучение в школе ЗАОЧНОЕ, т.е. начиная с сентября-октября 2012 года все поступившие будут систематически получать специально разработанные для заочного обучения материалы, содержащие изложение теоретических вопросов, методов рассуждений, разнообразные задачи для самостоятельной работы, образцы решений задач, деловые игры, контрольные и практические задания.

Контрольные работы учащихся будут тщательно проверяться и рецензироваться преподавателями ВЗМШ – студентами, аспирантами, преподавателями и научными сотрудниками МГУ, а также других вузов и учреждений, где имеются филиалы школы. Многие из преподавателей в свое время сами закончили ВЗМШ и поэтому особенно хорошо понимают, как важно указать, помимо конкретных недочетов, пути ликвидации имеющихся пробелов в знаниях, порекомендовать дополнительную литературу, поругать за невнимательность и похвалить за заметный (а иногда – и за самый маленький) прогресс и трудолюбие.

Поступившие в ОЛ ВЗМШ смогут узнать об увлекательных вещах, часто остающихся за страницами школьного учебника, познакомиться с интересными нестандартными задачами и попробовать свои силы в их решении. Для многих станет открытием, что задачи бывают не только в математике, физике и химии, но и в биологии, филологии, экономике и других науках. Решение задач поможет прояснить и сделать интересными многие разделы, казавшиеся непонятными и скучными.

Одна из особенностей учебных программ и пособий ВЗМШ – в том, что они созданы действующими на переднем крае науки талантливыми учеными и опытными незаурядными педагогами. Недаром на X Всемирном конгрессе по математическому образованию, который прошел летом 2004 года в Дании, рассказ о 40-летней работе математического отделения ОЛ ВЗМШ вызвал неподдельный интерес и одобрение участников.

Чтобы успешно заниматься в заочной школе, вам придется научиться самостоятельно и продуктивно работать с книгой, грамотно, четко, коротко и ясно излагать свои мысли, а это, как известно, умеют далеко не все. Возможно, наша заочная школа поможет вам выбрать профессию, найти свое место в окружающем мире.

Все выполнившие программу ОЛ ВЗМШ получают дипло-

мы. Хотя формальных преимуществ они не дают, приемные комиссии многих вузов учитывают, что обладатели этих удостоверений в течение продолжительного времени самостоятельно трудились над приобретением знаний, научились самостоятельно творчески работать, а это значит, что из них получатся хорошие студенты и, в дальнейшем, грамотные, вдумчивые, широко образованные специалисты.

Если у вас имеется такая возможность, вы будете частично общаться с нашей школой с помощью Интернета – чем дальше, тем больше.

Для поступления в ОЛ ВЗМШ надо успешно выполнить вступительную контрольную работу. Приемную комиссию интересует, в первую очередь, ваше умение рассуждать, попытки (пусть сначала не совсем удачные) самостоятельно мыслить и делать выводы. Преимуществом при поступлении пользуются проживающие в сельской местности, поселках и небольших городах, где нет крупных научных центров и учебных заведений и где получить дополнительное образование можно лишь заочно.

Решения задач вступительной работы надо написать на русском языке в обычной ученической тетради в клетку (на некоторые отделения – на открытке или на двойном тетрадном листе; см. ниже). Желающие поступить сразу на несколько отделений каждую работу присылают в *отдельной тетради*. На обложке тетради укажите: *фамилию, имя, отчество, год рождения, базовое образование* (сколько классов средней школы будет закончено *к сентябрю 2012 года*), *полный почтовый адрес* (с индексом), *откуда узнали об ОЛ ВЗМШ* (из «Кванта», от друзей, из афиш заочной школы и т.п.), *на какое отделение хотите поступить*.

Вступительные работы обратно не высылаются.

Без вступительной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение победители областных (краевых, республиканских) туров всероссийских олимпиад по соответствующим предметам, а также участники финальных туров этих олимпиад.

Учащиеся ОЛ ВЗМШ частично возмещают расходы на свое обучение. По просьбе тех, кто не в состоянии внести эту плату, ОЛ ВЗМШ готов обратиться в школу, в орган народного образования, к другому спонсору с ходатайством об оплате этим благотворителем соответствующих расходов.

Помимо индивидуального обучения, на всех отделениях ВЗМШ, кроме экономического и биологического, имеется форма обучения «Коллективный ученик». Это группа учащихся, работающая под руководством преподавателя (школьного учителя, преподавателя вуза, студента или другого энтузиаста), как правило, по тем же пособиям и программам, что и индивидуально. *Прием в эти группы проводится до 15 октября 2012 года*. Для зачисления группы требуется заявление ее руководителя (с указанием его профессии и должности, со списком учащихся и сообщением о том, в каком классе они будут учиться с сентября 2012 года); заявление должно быть подписано руководителем группы, заверено и подписано руководителем учреждения, при котором будет работать группа. Работа с группами «Коллективный ученик» может оплачиваться школами как факультативные занятия.

Обо всех наших отделениях вы можете узнать на обще-школьном сайте ОЛ ВЗМШ:

www.vzmsh.ru

На ваши вопросы мы ответим по электронной почте:

vzms@yandex.ru

На Северо-Западе России работает Заочная школа Ленинградского областного Министерства образования, созданная при Санкт-Петербургском государственном университете и имеющая отделения математики, биологии и химии.

Желающие поступить на отделение математики, проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), высылают вступительные работы по адресу: 197755 Санкт-Петербург, Лисий Нос, Ново-Центральная ул., д. 21/7, Северо-западная ЗМШ (на прием).

Проживающие в стальных регионах России, дальнем и ближнем зарубежье высылают свои работы по математике в адрес ОЛ ВЗМШ или соответствующего филиала:

Адрес ОЛ ВЗМШ: 119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ОЛ ВЗМШ, на прием (укажите отделение)

Телефон: (495) 939-39-30

Адреса филиалов математического отделения ОЛ ВЗМШ: 241035 г. Брянск, ул. Мало-Орловская, д. 8, тел.: (4832) 56-18-08, e-mail: brotek@mail.ru

610002 г. Киров, а/я 2039, ЦДООШ, тел.: (8332) 35-15-03, 35-15-04, e-mail: sms@extedu.kirov.ru, сайт: <http://cdoosh.kirov.ru>

150000 г. Ярославль, ул. Советская, д. 14, тел.: (0852) 11-82-03, e-mail: olimp@olimp.edu.yar.ru

Ниже вы найдете краткие сведения о каждом отделении ОЛ ВЗМШ и условия вступительных контрольных заданий.

Отделение математики

Из этого отделения, открывшегося в 1964 году, выросла вся заочная школа (вначале она так и называлась – математическая).

За время обучения вы более глубоко, чем в обычной школе, сможете осознать основные идеи, на которых базируется курс элементарной математики, познакомиться (по желанию) с некоторыми дополнительными, не входящими сейчас в школьную программу разделами, а также поучиться решать олимпиадные задачи. На последнем курсе большое внимание уделяется подготовке к сдаче школьных выпускных экзаменов и вступительных экзаменов в вузы.

На отделении созданы учебно-методические комплексы, приспособленные для заочного обучения. Часть из них издана массовым тиражом. Осуществляется перевод уже апробированных и вновь создаваемых материалов на электронный язык в интерактивном режиме, отделение готовится к работе в Интернете. Практически каждый год издаются и «проходят обкатку» новые пособия, расширяющие и дополняющие программу обучения.

Окончившие отделение математики получают, в зависимости от желания и способностей, либо подготовку, необходимую для выбора математики как профессии, либо математическую базу для успешного усвоения вузовского курса математики, лежащего в основе профессиональной подготовки по другим специальностям: ведь сейчас математика служит мощным инструментом исследований во многих отраслях человеческой деятельности. Поступившие в этом году на первый курс смогут выбирать новые пособия, разработанные для будущих физиков и биологов, химиков и историков...

Обучение длится 5 лет. Можно поступить на любой курс. Для этого к сентябрю 2012 года надо иметь следующую базу: на 1-й курс – 6 классов средней школы, на 2-й курс – 7 классов, на 3-й – 8, на 4-й – 9, на 5-й – 10 классов. При этом поступившим на 2-й, 3-й и 4-й курсы будет предложена часть заданий за предыдущие курсы. Для поступивших на 5-й курс обучение проводится по специальной интенсивной программе.

Для поступления надо решить хотя бы часть задач помещенной ниже вступительной работы (около номера каждой

задачи в скобках указано, учащимся каких классов она предназначена; впрочем, можно, конечно, решать и задачи для более старших классов). На обложке тетради напишите, на какой курс вы хотите поступить и в каком классе будете учиться с 1 сентября 2012 года.

Срок отправки вступительной работы – до 15 апреля 2012 года.

Группы «Коллективный ученик» (на все курсы по любой программе) принимаются без вступительной работы.

Работы можно отправлять по электронному адресу: priem@vzmsh.org

Сайт математического отделения:

<http://math.vzms.org>

Задачи

1 (6–10). Одно из двух положительных чисел увеличили на 1%, а второе – на 4%. Могла ли их сумма при этом увеличиться на 4%? (Приведите пример, если ответ «да», или докажите, что ответ «нет».)

2 (6–10). Можно ли разрезать произвольный треугольник на 4 треугольника так, чтобы любые два из них имели общий участок границы (не одну точку)?

3 (6–10). Простое или составное число $2001 \cdot 2041 + 400$? (Натуральное число называется простым, если оно делится лишь на себя и на единицу, и составным – в противном случае.)

4 (7–10). Сколькими способами можно разложить восемь разных монет в три кармана?

5 (6–10). Верно ли, что из пропорции $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ можно получить такую «производную пропорцию»: $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$?

6 (8–10). На стороне AB треугольника ABC построен квадрат $ABDE$ с центром O так, что точки D и C лежат по разные стороны от прямой AB . Найдите OC , если $AB = c$, а $\angle ACB = 135^\circ$.

7 (8–10). Существуют ли действительные числа a , b , c такие, что ни одно из уравнений

$$ax^2 + 2bx + c = 0, \quad bx^2 + 2cx + a = 0, \quad cx^2 + 2ax + b = 0$$

не имеет действительных решений?

8 (6–10). Семь грибников собрали вместе 100 грибов. Обязательно ли найдутся три грибника, собравшие вместе не менее 50 грибов, если:

а) каждый из семерых собрал разное количество грибов;

б) среди грибников могут быть собравшие одинаковое количество грибов?

9 (6–10). Число $\frac{100!}{10^{50}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100}{\underbrace{10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10}_{50 \text{ раз}}}$ записали в виде

несократимой дроби. Найдите ее знаменатель. (Произведение всех последовательных натуральных чисел от 1 до n обозначается через $n!$ и читается « n факториал», так что числитель данной дроби это «100 факториал».)

10 (8–10). Стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Найдите расстояние от точки пересечения медиан этого треугольника до центра вписанной в него окружности.

11 (8–10). Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ равна 1. Найдите наибольшее возможное значение суммы $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$.

12 (9–10). Решите уравнение $f(f(f(f(x)))) = 0$, где $f(x) = x^2 + 10x + 20$.

Отделение биологии

Прием ведется на два потока – трехгодичное обучение на базе 8 классов и двухгодичное на базе 9 классов. Зачисление на отделение осуществляется на конкурсной основе по результатам помещенной ниже вступительной работы.

Необходимо выполнить все пять заданий. В ответах можно использовать и факты, найденные в литературе, и собственные идеи. Просим для сведений, почерпнутых из книг, приводить ссылки на источники. При использовании сведений, полученных с помощью сети Интернет, необходимо приводить полную ссылку (URL).

Вместе с работой пришлите конверт с маркой и заполненным адресом (для отправки вам решения Приемной комиссии).

Вступительную работу можно отправить по электронной почте: uchenikivzmsh@gmail.com

Не забудьте в письме указать свои имя, фамилию, класс, а также полный почтовый адрес.

Срок отправки вступительной работы – не позднее 20 июня 2012 года.

Задачи

1. Существуют виды живых организмов, распространенные практически по всей земле (виды-космополиты). Очевидно, что популяции таких видов с разных континентов могут иметь существенные различия. Представьте, что перед вами поставлена задача разработать программу сохранения космополитического вида. Попробуйте составить такую программу и обосновать ее положения.

2. Представим, что вы обнаружили архивы кругосветной ботанической экспедиции прошлого века. Основные материалы экспедиции – сборы плодов и семян растений. К огромному сожалению, этикетки от большинства пакетиков с семенами утрачены. Можно, конечно, прорастить семена и определить те растения, которые взрастут. Однако возникают две проблемы: а) среди сборов могут быть еще не описанные виды; б) в сборах может попасться уже известный вид, но из новой для него местности. Перед вами стоит задача – с максимальной точностью определить место сбора каждого пакетика семян. Опишите и обоснуйте последовательность ваших действий.

3. Всем известно, что человек получает свой генетический материал в наследство от родителей в процессе слияния родительских половых клеток в зиготу. Можно встретить утверждение, что все клетки организма, произошедшие от зиготы, генетически идентичны. Приведите как можно больше примеров клеток человеческого организма, которые нельзя считать генетически идентичными зиготе.

4. В современной систематике принято выделять царство Протистов, которое включает в себя (помимо прочего) амёбу, инфузорию, эвглену и других одноклеточных, ранее рассматривавшихся в составе царства Животных. Приведите аргументы за и против выделения самостоятельного царства Протистов.

5. Подробно опишите эксперименты, результаты которых могли бы убедить вас в безвредности (или вредности) генетически модифицированных организмов.

Отделение физики

Обучение на отделении одно-, двух- и трехгодичное. На трехгодичный поток (курс Ф3) принимаются оканчивающие в 2012 году 8 классов средней школы, на двухгодичный (курс Ф2) – оканчивающие 9 классов и на одногодичный (курс Ф1) – 10 классов. Учащиеся, оканчивающие десятый класс, могут пройти ускоренно всю программу за один год (курс

Ф0). Для поступления на курс Ф3 нужно решить задачи 1–5 приведенной ниже вступительной работы, на курс Ф2 – задачи 4–9, на курс Ф1 – задачи 5–10, на курс Ф0 – задачи 4–10.

На обложке тетради следует указать фамилию, имя и отчество, код курса (Ф0, Ф1, Ф2 или Ф3), сколько классов будет закончено к 1 сентября 2012 года, полный почтовый адрес (с индексом), e-mail (если есть), телефон.

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2012 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются на курсы Ф1, Ф2, Ф3 без вступительной работы, только по заявлению руководителя.

E-mail отделения физики: olphys@polly.phys.msu.ru

Интернет-сайт: <http://phys.problems.ru>

Задачи

1. Два жука ползут с одной и той же скоростью: один по правильному треугольнику ABC , а другой, по треугольнику DEF , соединяющему середины сторон первого треугольника. Нарисуйте, как будет выглядеть траектория второго жука в системе отсчета, связанной с первым жуком. Известно, что жуки начинают двигаться одновременно из A к B и из E (середины стороны BC) к F (середине AC).

2. Пустой цилиндрический стакан плавает в воде так, что его дно погружено на $H = 3$ см. Когда в стакан доливают $V = 50$ мл масла, его дно опускается еще на $h = 6$ см. Найдите массу стакана. Плотность воды $\rho_v = 1000$ кг/м³, плотность масла $\rho_m = 800$ кг/м³.

3. Сосуд с водой нагрели от $t_0 = 0^\circ\text{C}$ до некоторой температуры t , затратив при этом количество теплоты $Q_1 = 664$ кДж. Если воду заменить на лед той же массы при 0°C , то на нагревание сосуда с содержимым до температуры t потребуется количество теплоты $Q_2 = 1654$ кДж, если сосуд вначале имеет температуру t_0 , и $Q_3 = 1494$ кДж, если начальная температура сосуда равна t . Определите по этим данным теплоемкость сосуда. Теплообмен с окружающей средой пренебречь.

4. Проводник сопротивлением R согнули в кольцо диаметром d и присоединили к источнику постоянного тока. Один из контактов закреплен на кольце, а второй движется вдоль кольца с постоянной скоростью v . Постройте зависимость падения напряжения U на проводнике от времени, если известно, что в начальный момент оно максимально и равно U_0 .

5. Посередине комнаты с закругленными стенами (на рисунке 1 дан вид сверху) находится вертушка из четырех двухсторонних зеркал шириной a каждое, соединенных под прямым углом. Луч лазера проходит на расстоянии $s = a/2$ от оси вертушки. Какую траекторию описывает этот луч на стене комнаты при вращении вертушки?

6. Тело, брошенное в горизонтальном направлении, должно упасть на землю не ближе $L = 10$ м по горизонтали от места бросания. С какой высоты нужно произвести бросок, чтобы скорость тела при падении на землю была минимальной?

7. Вода вытекает со скоростью u вниз из резервуара, который движется со скоростью v взад-вперед по горизон-

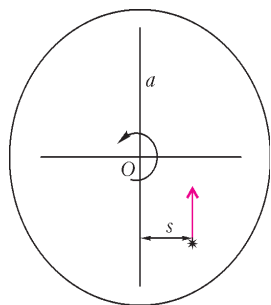


Рис. 1

тали вдоль направляющей длиной L . Найдите длину мокрого следа на полу, если расстояние от пола до резервуара равно h . Какое место на полу окажется самым мокрым? Скорости воды и резервуара можно считать постоянными по величине.

8. Конструкция в форме буквы Н состоит из двух столбиков и перекладины. Перекладина вдвое короче и соединяет середины столбиков. Все части сделаны из одного и того же материала и имеют одинаковые площади поперечного сечения. Найдите силу взаимодействия между перекладиной и каждым из столбиков, если конструкцию подвесить за конец одного из столбиков. Масса столбика равна m .

9. Два вольтметра и резистор соединены треугольником, как показано на рисунке 2. Если подключить батарейку

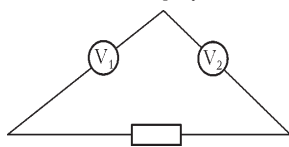


Рис. 2

параллельно резистору, то вольтметры покажут $U_1 = 3,6$ В и $U_2 = 2,4$ В. Если эту же батарейку подключить параллельно первому вольтметру, то показание второго вольтметра составит $U_2^* = 2,4$ В. Что покажет первый вольтметр, если эту батарейку подключить параллельно второму вольтметру? Внутренним сопротивлением батарейки пренебречь.

10. Одноатомный газ в количестве $\nu = 1$ моль находится в сосуде с поршнем при температуре $T_1 = 300$ К и давлении $p_1 = 300$ кПа. Какое минимальное количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы его объем увеличился в $k = 4$ раза, температура газа при этом не опускалась ниже $T_2 = 200$ К и ни на одном участке тепло не отводилось от газа?

Отделение химии

На отделение принимаются учащиеся, имеющие базовое образование в объеме 8, 9 и 10 классов средней школы. Полная программа обучения на отделении – три года. Программа включает следующие одногодичные курсы:

- общая химия (с элементами неорганической химии);
- неорганическая химия;
- органическая химия;
- химия окружающей среды (полгода).

Если вы хотите научиться решать задачи, вам будет полезен курс «Методы решений задач по химии». Его можно совмещать с другими курсами.

Более подробные сведения о программе и порядке обучения высылаются вместе с извещением о решении Приемной комиссии.

Задачи вступительной работы, помещенные ниже, – общие для всех поступающих, независимо от базового образования.

Прием на отделение проводится в течение всего 2012 года. Однако желательно отправить вступительную работу до 15 июня 2012 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Наш сайт: <http://www.chem-dist.ru>

Задачи

1. Изобразите строение молекул H_2S , H_2S_2 , SO_2 , H_2SO_4 . Укажите валентность и степень окисления серы в каждом из этих соединений.

2. Газообразное соединение азота и водорода содержит 12,5% водорода по массе, а плотность его паров по водороду равна 16. Найдите простейшую и молекулярную формулы этого соединения.

3. 12,0 г угля сожгли в 16,8 л кислорода. Продукты

пропустили через 150 г 20%-го раствора гидроксида натрия. Найдите массы всех растворенных веществ.

4. Напишите уравнения двух реакций, в которых хромат калия K_2CrO_4 – реагент, и уравнения двух реакций, в которых хромат калия – продукт.

5. Напишите структурные формулы всех продуктов, которые могут образоваться при нагревании смеси бутанола-2 и пропанола-1 с концентрированной серной кислотой.

Отделение филологии

За время существования отделения подготовлено и издано большое количество уникальных учебных пособий по русскому языку, общему языкознанию, истории и теории литературы.

На отделение принимаются все желающие, имеющие базовую подготовку в объеме 7 классов.

Отделение предлагает на выбор 18 учебных программ. Подробно о них рассказано на нашем сайте. Сведения о программах и порядке обучения высылаются также вместе с извещением о решении Приемной комиссии. При оценке вступительной работы учитывается, в каком классе вы учитесь.

Вы хотите исправить грамотность? Познакомьтесь с любопытными проблемами теории и практики русского языка? Освоить приемы лингвистического или литературоведческого анализа? Узнать кое-что о журналистике и оценить свои творческие способности? Приобрести навыки, необходимые для успешной сдачи экзаменов в вуз? Тогда выполните и пришлите нам вступительное задание, вопросы которого приведены ниже.

Внимание! На первой странице укажите следующие данные о себе: Ф.И.О., какой класс заканчиваете, полный (с индексом!) почтовый адрес, телефон. Вместе с выполненным заданием пришлите, пожалуйста, стандартный конверт с маркой и заполненным вашим адресом (с индексом) для ответа Приемной комиссии.

Срок отправки вступительной работы – до 15 мая 2012 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Если вопросы, предложенные нами, для вас пока сложны, но вы хотите у нас учиться, пришлите информацию о себе, и мы постараемся помочь.

Наш e-mail: filologiyvzmsh@mail.ru

Наш сайт: <http://philologist.su>

Вопросы

1. Помните историю дуэли Онегина и Ленского? Автор утверждает, что «пружина чести», сработав безотказно, заставила Евгения принять вызов. При этом сам герой чувствует, что повел себя не так, как следовало «мужу с честью и умом». Итак, стрелялся, следуя закону чести... или вопреки ему? Разъясните мнимое противоречие.

2. Как вам кажется, почему русские поэты-классики XIX века так любили ямб, а детские поэты всех времен предпочитают хорей?

3. Придумайте слово, в котором нашли бы отражение основные фонетические законы русского языка: озвончение, оглушение, редукция.

4. Расскажите об одном и том же событии в двух текстах, принадлежащих разным стилям речи.

Отделение экономики

Хотите научиться разбираться в экономике? Узнать изнутри работу маркетологов, банкиров, предпринимателей? Открыть свою собственную фирму, пока – в экономической игре? Тогда эта информация для вас!

Обучение на отделении заочное, все учебные материалы школьники получают по почте (часть материалов учащиеся могут получить по Интернету и электронной почте для тех, у кого они есть). Учиться на экономическом отделении могут те, кто в 2012 году закончит 7–10 класс, срок обучения от 1 года до 4 лет. Обучение индивидуальное (формы учебы «Коллективный ученик» на экономическом отделении нет).

Программа экономического отделения включает изучение экономической теории и знакомство с практикой экономики и бизнеса. Сначала все учащиеся познакомятся с основами экономики, а далее вы сможете выбрать такие предметы, как предпринимательство и менеджмент, бухгалтерский учет и финансы, мировая экономика и география, экономическая история. Учащиеся 10–11 классов в дополнение к курсу экономики получают необходимую подготовку по русскому языку и литературе, математике, обществознанию, что поможет лучше сдать ЕГЭ, успешно участвовать в предметных олимпиадах и поступить в лучшие вузы страны.

Учась на экономическом отделении, вы сможете заочно познакомиться со студентами, выпускниками и даже преподавателями МГУ имени М.В.Ломоносова, узнаете о разнообразных замечательных профессиях в экономике, одну из которых, возможно, вы выберете для себя в будущем.

Во время обучения ученики становятся участниками увлекательной бизнес-игры, которая будет вестись по переписке (а также через Интернет).

Для поступления на отделение вам нужно выполнить приведенное ниже вступительное задание.

Прочитайте текст:

Этим летом школьник Тёпа Экономов вместе с бабушкой в первый раз побывал в Москве. Кремль, музеи, прогулка на теплоходе по Москве-реке, здание Московского университета на Ленинских горах – все смешалось в одно яркое впечатление. Но особенно поразил Тёпу огромный супермаркет, в котором прямо посреди торгового зала был залит ледяной каток. После катания Тёпа поужинал в «Макдональдсе» – ему показалось, что ничего вкуснее он в жизни не пробовал, хотя бабушка имела на этот счет другое мнение. Гуляя по улицам Москвы, Тёпа не раз наблюдал, как сносили мелкие палатки и ларьки на рынках, возле метро и у строящихся торговых центров. Нагулявшись вдоволь, через неделю Тёпа возвратился в свой небольшой город. Только теперь ему показались неказистыми торговые ларьки и шумный рынок, куда он любил ходить раньше. Может быть, здесь люди просто не знают о том, что торговля может быть организована по-другому? У Тёпы появилась идея предложить городской администрации снести все ларьки на рыночной площади, а на их месте построить большой супермаркет с ледяным катком и «Макдональдсом». Тёпе очень понравилась его идея, он даже представлял себе, что городские власти похвалят его и может быть даже дадут премию, которая была бы ему очень кстати для его предпринимательских планов.

Задание

Оцените рассуждения Тёпы Экономова, скажите, прав ли он и почему. Постарайтесь изложить свои мысли коротко, в нескольких предложениях. Найдите ответ на наш вопрос вам помогут Интернет, учебники и справочники, научно-популярные журналы (например, «Наука и жизнь»), друзья и учителя.

Свои ответы присылайте по электронной почте: econ@vzms.ru или обычным письмом с указанием полного почтового адреса и индекса, фамилии, имени и отчества (в письме всю информацию о себе пишите, пожалуйста, печат-

ными буквами). Озаглавьте письмо так: «Экономика, вступительное задание-2012». Укажите класс, в котором вы сейчас учитесь. Пожалуйста, укажите источник информации об ОЛ ВЗМШ – «Квант», «Наука и жизнь», афиша, другое (например, узнал от учителя, друзей).

Срок отправки вступительной работы – до 31 мая 2012 года.

Наш адрес в Интернете: www.vzms.ru/page/econ

Отделение «Права человека и демократия»

Школьникам 8–11 классов и группам «Коллективный ученик» предлагаются два курса.

1) Годовой курс «Беседы о правах человека, нравственности, праве, законе и государстве». В курсе даются современные представления об основных понятиях, связанных с правом, законом и государством, рассказывается об основах российского законодательства, о правах человека. Разбираются примеры судебных процессов, приводятся общекультурные примеры, связанные с направленностью курса.

2) Полугодовой курс «Беседы об основах демократии».

Желающие учиться должны сообщить свой полный почтовый адрес, адрес электронной почты (если есть), фамилию, имя и отчество, сколько классов закончено. При оценке вступительной работы мы учитываем возраст (базовое образование) поступающего. В письме обязательно вложите обычный конверт с маркой и вашим адресом (чтобы мы могли вам ответить) и ответы на приведенные ниже вопросы.

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2012 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Наш сайт: <http://www.femida.ru.org>

Наш e-mail: pravo04@mail.ru

Вопросы

1. Как вы полагаете, когда люди стали задумываться о правах отдельного человека?
2. Каково основное отличие демократии от других форм организации общества?
3. Зачем нужны партии, представляющие заведомое меньшинство населения?
4. Какая из перечисленных ниже фамилий попала сюда «по ошибке»: Кони А.Ф., Корнилов Л.Г., Плевако Ф.Н., Александров П.А., Спасович В.Д.?

Отделение истории

Обучение на отделении позволит всем, в том числе жителям самых отдаленных городов и деревень, расширить свой кругозор, подготовиться к единому государственному экзамену по истории. Успешно прошедшие курс обучения получают диплом.

А зачем нужно изучать историю? Во-первых, это просто интересно. Любопытно знать, как жили когда-то люди, во что одевались, чем питались, что читали, как женились и выходили замуж, за что боролись и «на что напарывались». Во-вторых, это полезно. Только зная прошлое, можно понять настоящее и прогнозировать будущее. Мы поможем вам в этом разобраться.

Специально для вас опытные преподаватели пишут книжки. Последние новости из мира истории вы узнаете одними из первых! Мы будем поддерживать с вами постоянную связь. По нашим книжкам вы будете выполнять особые задания и сообщать нам, что вы раскопали. Ведь, в сущности, труд историка и состоит из этих раскопок. Историк-археолог, копая землю и песок, отыскивает крупницы ушед-

ших времен; историк-архивариус копается в гряде бумаг и достает из архивов и даже из частной переписки все, что может позволить ему понять образ времени; историк-теоретик как увлекательный роман читает археологические таблицы, сухие сводки, статистику и восстанавливает по ним живую ткань ушедшей жизни. У историка особая профессия: он в одном лице следователь, прокурор и адвокат времени.

Вступительное задание, приведенное ниже, нужно выполнить на двойном листе бумаги.

Срок отправки вступительной работы – до 1 июня 2012 года.

Группы «Коллективный ученик» принимаются без вступительной работы.

Задание

1. Отгадайте, кто это

- Над его гробом воздвигнут храм.
- Ему посвящена икона Андрея Рублева «Троица» и картина Нестерова «Видение отроку Варфоломею».
- Сын бедного ростовского дворянина.
- В детстве имел необычный для XIV века интерес – страсть к грамоте.
- В XX веке о нем бы сказали: «не от мира сего, белая ворона».
- Возможная карьера для такого юноши в Древней Руси – книгочей в храме, переписчик книг, составитель летописного свода..., если бы не его подвижническая натура.
- В молодости – отшельник. В лесу на крутом холме поставил келью и уединился, дав обет молчания, иночества, безбрачия.
- Основатель и настоятель Троице-Сергиева монастыря.
- Установил на Руси праздник Троицы (в годы ига – символ единства Руси).

Федеральная заочная физико-техническая школа при МФТИ

Федеральная заочная физико-техническая школа (ФЗФТШ) при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор в 8–11 классы учащихся 7–10 классов общеобразовательных учреждений (школ, лицеев, гимназий и т. п.), расположенных на территории Российской Федерации.

ФЗФТШ при МФТИ как государственное образовательное учреждение профильного дополнительного образования детей работает с 1966 года. За прошедшие годы школу окончили более 80 тысяч учащихся; практически все ее выпускники поступают в ведущие вузы страны, а каждый второй студент МФТИ – ее бывший ученик. Учредителем школы является Министерство образования и науки РФ.

Научно-методическое руководство школой осуществляет Московский физико-технический институт (государственный университет). Обучение в школе ведется по трем предметам научно-технической направленности – физике, математике и информатике. В 8–9 классах изучаются только физика и математика, в 10–11 классах к ним добавляется еще один предмет – «математические основы информатики и ИКТ» (информатика). Учащиеся 10–11 классов могут по своему выбору изучать либо только два предмета, а именно физику и математику или математику и информатику, либо все три предмета вместе – и физику, и математику, и информатику.

Цель нашей школы – помочь учащимся 8–11 классов общеобразовательных учреждений, интересующимся пред-

• Личным примером увлек массы русских людей на неосвоенные земли.

• Способствовал переселению в края, недоступные для ордынских набегов.

• Один за другим его ученики уходят в глухие места на пустоши и ставят монастыри – духовные и культурные центры Руси.

• Его ученики поставили 40 монастырей, ученики учеников – 60.

• Его последователи – Савва Сторожевский, Кирилл Белозерский и др.

2. Опишите, не более чем в 7 предложениях, политический портрет председателя первого советского правительства.

Внимание!

ОЛ ВЗМШ проводит набор на курс «Обществознание». Курс включает следующие дисциплины: философия, человек и общество, политология, теория государства, государственное устройство России, право, экономика.

Слушателям направляются оригинальные учебные пособия, созданные на основе многолетнего опыта работы авторов курса. Проверка знаний осуществляется с помощью общепринятой системы тестирования.

Программа курса рассчитана на 1 год. Обучение носит заочный характер и имеет целью дать выпускникам школ – как крупных городов, так и небольших сел – глубокие знания по общественным дисциплинам, подготовить их к успешной сдаче ЕГЭ по обществознанию.

Для записи на курс необходимо отправить заявление *до 1 июня 2012 года*. В заявлении укажите фамилию, имя, отчество, свой полный домашний адрес (с индексом!), класс, в котором вы будете учиться с 1 сентября 2012 года.

Заявление отправьте по адресу: *119234 Москва, Воробьевы горы, МГУ, ОЛ ВЗМШ (курс «Обществознание»)*.

метами научно-технической направленности, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам, а также способствовать их профессиональному самоопределению.

Набор в 8, 9, 10 и 11 классы на 2012/13 учебный год проводится на заочное, очно-заочное и очное отделения.

Заочное отделение (индивидуальное заочное обучение)

Тел./факс: (495) 408-51-45, e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Прием на заочное отделение проводится на конкурсной основе по результатам выполнения приведенного ниже вступительного задания по физике и математике (для поступающих в 8–9 классы) или по выбранной совокупности предметов (для поступающих в 10–11 классы). Полная программа обучения рассчитана на 4 года, т.е. с 8 по 11 классы включительно, но начать обучение можно с любого из указанных классов.

В течение учебного года, в соответствии с программой ФЗФТШ, ученик будет получать по каждой теме задания по физике, математике и информатике (5–6 заданий по физике и математике для 8–9 классов, 6–7 заданий по физике и математике и 4–5 заданий по информатике для 10–11 классов), а затем – рекомендуемые авторские решения этих заданий вместе с проверенной работой. Задания содержат теоретический материал, разбор характерных примеров и задач по соответствующей теме и 8–12 контрольных вопросов и задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные. Задания составляют опытные преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ, а также выпускники МФТИ и другие специалисты. Работы учащихся-заочников проверяют студенты, аспиран-

ты и выпускники МФТИ (из них 80% – выпускники нашей школы).

Срок отправки решения вступительного задания – не позднее 1 марта 2012 года. Проверенные вступительные работы обратно поступающему не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 2012 года.

Тетрадь с выполненными заданиями высылайте по адресу: 141700 Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9, ФЗФТШ при МФТИ.

Школьники, уже обучающиеся в ФЗФТШ, могут изменить совокупность изучаемых предметов по личному заявлению на имя директора ФЗФТШ. Если ученик ФЗФТШ хочет добавить в 10 или 11 классе к уже изучаемым предметам информатику (или заменить физику на информатику), то ему не требуется выполнять вступительное задание по информатике при условии хорошей или отличной успеваемости по математике за предыдущий период обучения в ФЗФТШ. Если же ученик ФЗФТШ хочет добавить в 10 или 11 классе к уже изучаемым предметам физику (или заменить информатику на физику), то ему необходимо выполнить вступительное задание по физике в соответствии с классом обучения.

Вступительное задание по физике и по математике (для поступающих в 8–9 классы) или по выбранной совокупности предметов (для поступающих в 10–11 классы) ученик выполняет самостоятельно в одной школьной тетради на русском языке, сохраняя тот же порядок задач, что и в задании. Тетрадь нужно высылать в конверте простой бандеролью. На внутреннюю сторону обложки тетради наклейте справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. На лицевую сторону обложки наклейте лист бумаги, четко заполненный по приведенному ниже образцу:

Л. №																		
№ задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Σ	
Ф																		
М																		
И																		

- Республика, край, область *Кемеровская область*
- Фамилия, имя, отчество *Чистова Галина Сергеевна*
- Класс, в котором учитесь *восьмой*
- Номер школы *35*
- Вид школы (обычная, лицей, лицей)
- Ф.И.О. учителей по физике *Смирнов Евгений Васильевич*
- по математике *Кочетов Петр Александрович*
- по информатике *Дронова Вера Ивановна*
- Подробный домашний адрес (с указанием индекса), телефон, e-mail *654041 г. Новокузнецк, ул. Волжская, д.74, кв.3, e-mail: dio@rdsc.ru*
- Адрес школы и телефон, факс, e-mail *654041 г. Новокузнецк, ул. Циолковского, д.65, тел.: (3843) 35-19-72, e-mail: must@yandex.ru*
- Каким образом к вам попало это объявление?

На конкурс ежегодно приходит более 3 тысяч вступительных работ. Пожалуйста, обратите внимание на правильность заполнения анкеты! Пишите аккуратно, лучше печатными буквами.

Для получения ответа на вступительное задание и для отправки вам первых заданий *обязательно* вложите в тетрадь два одинаковых бандерольных конверта размером 160 × 230 мм. На конвертах четко напишите свой домашний адрес.

Очно-заочное отделение (обучение в факультативных группах)

Тел./факс: (498) 744-63-51, e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Факультативные группы могут быть организованы в любом общеобразовательном учреждении *двумя или тремя преподавателями* – физики, математики и информатики, в отдельных случаях разрешается обучение по одному предмету. Руководители факультатива принимают в него учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ФЗФТШ.

Группа (не менее 7 человек) принимается в школу, если директор общеобразовательного учреждения сообщит в ФЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный алфавитный список обучающихся (Ф.И.О. полностью с указанием класса текущего учебного года и итоговых оценок за вступительное задание по выбранной совокупности предметов, *адрес, телефон, факс и e-mail школы*.) Все эти материалы и конверт для ответа о приеме в ФЗФТШ с обратным адресом одного из руководителей следует выслать до 25 июня 2012 года по адресу: 141700 Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9, ФЗФТШ при МФТИ (с пометкой «Факультатив»). Тетради с работами учащихся *не высылаются*.

Работа руководителей факультативов может оплачиваться общеобразовательным учреждением как руководство профильными факультативными занятиями по предоставлению ФЗФТШ при МФТИ соответствующих сведений.

Руководители, работающие с учащимися, будут в течение учебного года получать учебно-методические материалы (программы по физике, математике и информатике, задания по темам программ, решения заданий с краткими рекомендациями по оценке работ учащихся), приглашаться на курсы повышения квалификации учителей физики и математики, проводимые на базе МФТИ. Работы учащихся проверяют и оценивают руководители факультативных групп, а в ФЗФТШ ими высылаются ведомости с итоговыми оценками по каждому заданию и итоговая ведомость за год.

Очное отделение (обучение в вечерних консультационных пунктах)

Тел.: (499) 755-55-80, e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Для учащихся Москвы и Московской области по программам ФЗФТШ работают вечерние консультационные пункты. Набор в них проводится по результатам вступительных экзаменов по физике и математике и собеседования, которые проходят в середине сентября. Обучение ведется по двум предметам.

Программы ФЗФТШ при МФТИ являются профильными дополнительными образовательными программами и едины для всех отделений. Кроме того, ученикам всех отделений будет предложено участвовать в физико-математической олимпиаде «ФИЗТЕХ-2012», которая, как правило, проводится на базе МФТИ и в ряде городов России в конце марта, в других очных и заочных олимпиадах МФТИ и его факультетов. Для учащихся 9–11 классов на базе МФТИ работает субботний лекторий по физике и математике по программе ФЗФТШ. Лекции читают преподаватели института (как правило, авторы заданий). Подробнее об этих мероприятиях

можно прочитать на сайте ФЗФТШ:

<http://www.school.mipt.ru>

По окончании учебного года учащиеся, успешно выполнившие программу ФЗФТШ, переводятся в следующий класс, а выпускники (одиннадцатиклассники) получают свидетельство об окончании школы с итоговыми оценками по изучавшимся в 11 классе предметам.

Ученикам, зачисленным в ФЗФТШ, будет предложено оплатить безвозмездный целевой взнос для обеспечения учебного процесса в соответствии с уставными целями школы. Сумма взноса может ориентировочно (при обучении по двум предметам) составлять для учащихся заочного отделения 2000–3000 руб. в год, для очного 3500–6000 руб. в год, для очно-заочного 2800–4500 руб. (с каждой факультативной группы) в год.

Для учащихся Украины работает УЗФТШ при ФТННЦ НАН Украины (обучение платное). Желаящим поступить туда следует высылать работы по адресу: 03680 Украина, г. Киев, 6-р Вернадского, д. 36, ГСП, УЗФТШ. Тел.: 8-(10-38-044) 424-30-25, 8-(10-38-044)422-95-64, сайт УЗФТШ: mfti.in.ua, e-mail: ftsch@imp.kiev.ua

Для учащихся из зарубежных стран возможно только платное обучение на заочном и очно-заочном отделениях.

Внимание! Прислав нам решенное вступительное задание, вы даете согласие на обработку ваших персональных данных (в соответствии с Федеральным законом от 27.07.2006 г. №152-ФЗ), которые будут использованы исключительно для отправки вам материалов по почте и учета вашей успеваемости.

Ниже приводятся вступительные задания по математике, физике и информатике. Номера задач, обязательных для выполнения (заочное и очно-заочное отделения), даны в таблице (номера классов указаны на текущий 2011/12 учебный год):

	7 класс	8 класс	9 класс	10 класс
Математика	1–5	2,3,5–8	5,8–12	8–14
Физика	1–5	6–10	8–13	11–16
Информатика	–	–	1–5	3–7

Вступительное задание по математике

1. Решите уравнение

$$(3x + 0,4)^2 + (4x + 2)^2 - \left(5x + \frac{7}{3}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4 - \frac{31}{64}}.$$

2. Поезд, двигаясь с постоянной скоростью, к 23.08 проехал в 1,35 раза больший путь, чем к 19.45 того же дня. Когда поезд выехал?

3. Заданы три точки: $A(3; -4)$, $B(-2; 5)$, $C(-12; 3)$. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку C и параллельной прямой AB .

4. В треугольнике ABC биссектриса CE перпендикулярна медиане AM . Найдите AC , если $BC = 2012$.

5. На первой остановке маршрута в пустой салон троллейбуса вошли пассажиры, и половина из них заняла места для сидения. Сколько человек вошло в троллейбус на первой остановке, если после второй остановки число пассажиров увеличилось на 8% и известно, что троллейбус вмещает не более 70 человек?

6. В четырехугольнике $PQSR$ противоположные стороны PQ и SR параллельны, а биссектрисы углов RPQ и SQP пересекаются в точке M , лежащей на отрезке RS . Найдите длину отрезка PR , если $RS = 2012$, $QS = 458$.

7. В треугольнике DEF проведена медиана DK . Найдите углы треугольника DEF , если известно, что угол KDE равен 70° , а угол DKF равен 140° .

8. Найдите количество трехзначных чисел, в каждом из которых сумма каких-либо двух цифр равна 3.

9. Угол BAD параллелограмма $ABCD$ равен 60° , биссектрисы углов A и D этого параллелограмма пересекаются на прямой BC . Найдите диагонали параллелограмма, если $AB = a$.

10. При каких значениях параметра a уравнения $6x^2 - (7a + 1)x - 3a^2 = 4a + 1$ и $x^2 + x + a = a^2$ имеют общий корень?

11. Во время поездки по загородному шоссе автомобиль на каждые 100 км пути расходует на 3 л бензина меньше, чем в городе. Водитель проехал 48 мин по городу и 2 ч по загородному шоссе и затратил 27,2 л бензина. Затем водитель проехал по загородному шоссе еще полтора часа, затратив 15,6 л бензина. Найдите среднюю скорость автомобиля за всю поездку, если по городу автомобиль едет на 30 км/ч медленнее, чем по загородному шоссе.

12. Найдите значение выражения
$$\frac{\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha - 1}{\cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha - 1}.$$

13. Решите уравнение $\cos 12x = \cos 6x + \sin 6x$.

14. Даны геометрическая прогрессия с общим членом b_n и арифметическая прогрессия с общим членом a_n , разность которой отлична от нуля. Известно, что $b_1 = a_2$, $b_2 = a_{14}$, $b_3 = a_8$. Определите, являются ли четвертый и пятый члены геометрической прогрессии b_4 и b_5 также членами данной арифметической прогрессии (если да, то определите их номера).

Вступительное задание по физике

1. На стадионе проходит школьная эстафета. Каждый участник команды, а в состав команды входят два школьника, должен пробежать один круг по стадиону длиной $L = 400$ м. Тренер находится у беговой дорожки на расстоянии $l = 20$ м по направлению движения от линии старта. Школьник, бежавший первый этап, пробежал мимо тренера через время $t_1 = 4$ с после старта. Второй участник команды преодолел свой (второй) этап эстафеты за время $t_2 = 1$ мин 40 с. Определите скорости школьников. Считайте, что каждый из них бежит свой этап с постоянной скоростью. Определите среднюю скорость бега этой эстафетной команды.

2. Перед началом ледохода на реке взрывают лед. По воздуху звук от взрыва до правого берега дошел на $\Delta t = 1$ с позже, чем до левого. На каком расстоянии l от левого берега был заложен заряд? Ширина реки в данном месте $L = 1$ км, скорость звука в воздухе $v_{\text{зв}} = 320$ м/с.

3. В цилиндрическом сосуде с тонкими вертикальными стенками высотой $H = 7$ см находится некоторый объем воды $V_{\text{в}}$. В сосуд опустили медный кубик массой $m = 445$ г. При этом кубик оказался целиком погруженным в воду, а вода не вылилась из сосуда и поднялась до его верхнего края. Определите объем воды в сосуде. Площадь дна сосуда $S = 50$ см², плотность меди $\rho = 8,9$ г/см³.

4. Между двумя покоящимися на горизонтальной поверхности небольшими тележками массами $m_1 = 50$ г и $m_2 = 75$ г вплотную к ним помещена сжатая с помощью нити легкая пружина. После пережатия нити и полного распрямления пружины тележки пришли в движение с некоторыми постоянными скоростями. Через время $t = 3$ с расстояние между тележками составило $L = 150$ см. Определите скорости тележек. Размерами пружины пренебречь.

5. Из тонкого стального листа требуется сделать модель айсберга – «льдину» в форме параллелепипеда толщиной $H = 1$ м и сторонами $a = 4$ м и $b = 3$ м. При этом отношение объема подводной части «льдины» к ее полному объему должно быть таким же, как и у настоящего айсберга в пресной воде. Какова должна быть толщина стального листа? Объем тонкого стального листа, необходимого для изготовления такой модели льдины, равен произведению площади поверхности параллелепипеда на толщину стенок. Плотность стали $\rho_{\text{ст}} = 7800 \text{ кг/м}^3$, плотность льда $\rho_{\text{л}} = 900 \text{ кг/м}^3$. Массой воздуха, находящегося внутри модели айсберга, пренебречь.

6. Медный стержень длиной $L = 1$ м подвешен на динамометре в вертикальном положении. При этом он частично погружен в воду. При увеличении глубины погружения стержня на $l = 20$ см показания динамометра изменились на $\Delta P = 1$ Н. Определите массу стержня. Плотность меди $\rho_{\text{м}} = 8900 \text{ кг/м}^3$, ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

7. На краю горизонтальной поверхности стола лежит однородная доска длиной $L = 6$ м так, что за край выступает четверть доски (рис. 1). Масса доски $m_1 = 20$ кг. На каком максимальном расстоянии x от края стола на доску можно положить небольшой по размерам груз массой $m_2 = 30$ кг, чтобы доска осталась в равновесии?

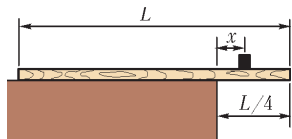


Рис. 1

8. Требуется наполнить сосуд емкостью $V = 100$ л теплой водой при температуре 40°C . Для этой цели холодная вода при температуре

16°C пропускается через проточный водонагреватель на основе биотоплива (топливные брикеты из соломы), который имеет мощность $P = 20$ кВт и КПД $\eta = 80\%$. Сколько времени будет наполняться сосуд и каков расход биотоплива (в килограммах)? Удельная теплота сгорания топливных брикетов из соломы $q = 18 \text{ МДж/кг}$.

9. В калориметр, где находится вода массой $M_{\text{в}} = 2,5$ кг при температуре $t_{\text{в}} = 5^\circ\text{C}$, помещают кусок льда массой $M_{\text{л}} = 700$ г. Когда установилось тепловое равновесие, оказалось, что масса воды увеличилась на $m = 64$ г. Определите начальную температуру льда. Теплоемкостью калориметра и потерями тепла пренебречь. Удельная теплота плавления льда $\lambda_{\text{л}} = 3,2 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$, удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$, удельная теплоемкость льда $c_{\text{л}} = 2100 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$.

10. Сопротивление однородной металлической проволоки длиной l , имеющей квадратное сечение со стороной a , равно $R = 5$ Ом. После протягивания проволоки через волоочный станок получился проводник круглого сечения диаметром a . При этом длина проводника увеличилась. Определите новое значение сопротивления проводника.

11. Камень начинает падение с некоторой начальной высоты H_1 над землей. При уменьшении начальной высоты на $h = 15$ м время падения уменьшилось на $\Delta t = 1$ с. Определите H_1 . Сопротивлением воздуха пренебречь, $g = 10 \text{ м/с}^2$.

12. На легкой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, подвешены два груза одинаковой массы M . Грузы покоятся. На один из грузов устанавливают перегрузок массой $m = 300$ г. Через $\tau = 0,8$ с после этого один из грузов оказался выше другого на $h = 100$ см. Определите массу M . Массой блока и трением в его оси пренебречь.

13. За «передовые опыты с двумерным материалом – графеном» выпускникам МФТИ А.К.Гейму и К.С.Новосе-

лову была присуждена Нобелевская премия по физике за 2010 год. Графен является двумерным кристаллом, состоящим из одиночного слоя атомов углерода. Его кристаллическая решетка (рис. 2) представляет собой плоскость, состоящую из правильных шестиугольных ячеек (атомы углерода располагаются в вершинах правильного шестиугольника). Расстояние между ближайшими атомами углерода в шестиугольниках $a_0 = 0,142$ нм. Определите массу одного квадратного метра графена.

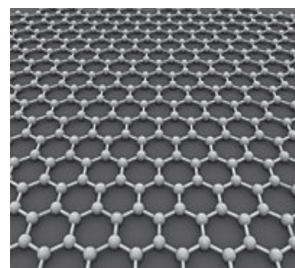


Рис. 2

14. Футбольный мяч накачивается в теплом помещении для игры на открытой площадке. Температура в помещении $t_1 = 20^\circ\text{C}$, температура на футбольном поле $t_2 = -10^\circ\text{C}$. Для нормальной игры необходимо, чтобы давление воздуха в мяче составляло $p_{\text{м}} = 1,1$ атм. Сколько качаний поршневым насосом нужно сделать, если объем накачанного мяча составляет $V_{\text{м}} = 5,5$ л, а объем камеры насоса $V_{\text{н}} = 0,7$ л? Давлением воздуха в ненакачанном мяче пренебречь. Считать, что объем накачанного мяча при его переносе из помещения на открытый воздух не изменяется. Давление воздуха в помещении $p_0 = 1$ атм.

15. Моль идеального газа охлаждается при постоянном объеме, а затем при постоянном давлении приводится в состояние с температурой, равной начальной температуре $T_0 = 300$ К. При переходе из начального состояния в конечное газ получил количество теплоты $Q = 1500$ Дж. Во сколько раз конечное давление отличается от начального?

16. Маленький заряженный шарик массой m , подвешенный на легкой нерастяжимой непроводящей нити, помещают в горизонтальное однородное электрическое поле. Нить отклоняется от вертикали на некоторый угол. При каком минимальном значении напряженности электрического поля нить порвется, если известно, что она выдерживает максимальную силу натяжения $T_{\text{макс}} = 2mg$? Заряд шарика $q > 0$.

Вступительное задание по информатике

1. Рассеянный профессор собирался на работу в университет. Открыв ящик комода, он обнаружил, что там вперемешку лежит большое количество одинаковых перчаток. Профессор точно помнит, что 14 из них – левые, а 19 – правые. Какое минимальное количество перчаток ему нужно взять из комода, чтобы гарантированно иметь на руках пару? Ответ обоснуйте.

2. Между четырьмя деревьями ЛУГОВАЯ, ЛЕСНАЯ, МИХАЙЛОВКА, АНДРЕЕВКА ежедневно курсируют автобусы. Известно расписание движения (см. следующую страницу). Митя засиделся на дне рождения друга в деревне ЛУГОВАЯ до четырех часов утра (4:00). Определите самое раннее время, когда он может приехать на автобусе в родную деревню АНДРЕЕВКА, если пешком идти нельзя. Ответ обоснуйте.

3. На протяжении июня лесное озеро зарастает ряской. Первого июня ряски еще не было. Второго июня на озере было два растения ряски. Третьего июня было уже четыре растения ряски, четвертого – восемь и так далее. Тридцатого июня ряска покрывала ровно всю поверхность озера. Назовите дату, когда она покрывала ровно половину поверхности озера. Ответ обоснуйте.

Расписание движения

Пункт отправления	Пункт назначения	Время отправления	Время прибытия
АНДРЕЕВКА	МИХАЙЛОВКА	06:20	08:35
МИХАЙЛОВКА	ЛУГОВАЯ	10:25	12:35
ЛУГОВАЯ	МИХАЙЛОВКА	11:45	13:30
ЛЕСНАЯ	АНДРЕЕВКА	15:15	16:25
АНДРЕЕВКА	ЛУГОВАЯ	12:45	16:35
МИХАЙЛОВКА	АНДРЕЕВКА	13:15	15:40
ЛУГОВАЯ	АНДРЕЕВКА	13:40	17:25
ЛУГОВАЯ	ЛЕСНАЯ	12:30	14:15
АНДРЕЕВКА	ЛЕСНАЯ	17:35	19:30
ЛЕСНАЯ	ЛУГОВАЯ	19:40	21:55

4. Строки (цепочки символов латинских букв) создаются по следующему правилу. Первая строка состоит из одного символа – латинской буквы «А». Каждая из последующих цепочек создается такими действиями: в очередную строку сначала записывается буква, чей порядковый номер в алфавите соответствует номеру строки, к ней слева дважды подряд приписывается предыдущая строка. Вот первые 4 строки, созданные по этому правилу:

- (1) А
- (2) ААВ
- (3) ААВААВС
- (4) ААВААВСААВААВСД

Выпишите буквы, которые могут стоять в 256 позиции в девятой и всех последующих строках. Ответ обоснуйте. Латинский алфавит для справки:

АВСDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

5. Отметьте штриховкой на координатной плоскости об-

ласть, в которой и только в которой выполняется приведенное логическое выражение (имеет значение true):

$$(|x| + |y| < 2) = (x^2 + y^2 = 9)$$

Если граница входит в область, то обозначьте сплошной линией, если не входит, то – штриховой.

6. Опишите на русском языке или в виде блок-схемы алгоритм решения обобщенного квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. В обобщенном квадратном уравнении любой из коэффициентов может равняться нулю (в том числе и все одновременно).

7. Система команд исполнителя РОБОТ, живущего в прямоугольном лабиринте на клетчатой плоскости (рис.3), состоит из четырех команд:

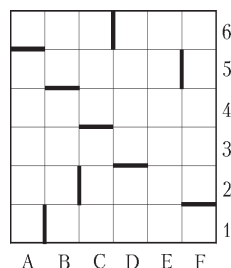


Рис. 3

вверх	вниз	влево	вправо
-------	------	-------	--------

Цикл ПОКА < условие > команда выполняется, пока условие истинно, иначе происходит переход на следующую строку. Сколько клеток приведенного лабиринта соответствуют требованию, что, выполнив предложенную ниже программу, РОБОТ остановится в той же клетке, с которой он начал движение? По периметру лабиринта располагаются стенки.

НАЧАЛО.

ПОКА < сверху свободно > вверх.

ПОКА < слева свободно > влево.

ПОКА < снизу свободно > вниз.

ПОКА < справа свободно > вправо.

КОНЕЦ.

Новый прием в школы-интернаты при университетах

Специализированный учебно-научный центр (СУНЦ) Московского государственного университета (МГУ) имени М.В.Ломоносова (школа имени академика А.Н.Колмогорова), а также СУНЦ НГУ, СУНЦ УрГУ и Академическая гимназия СПбГУ объявляют набор учащихся в 10 класс (двухгодичное обучение) на физико-математическое и химико-биологическое отделения и в 11 класс (одногодичное обучение) на физико-математическое отделение. В рамках двухгодичного физико-математического отделения кроме основного профиля выделяется компьютерно-информационный класс (СУНЦ МГУ). Химико-биологическое отделение представлено специализациями по химии и биологии.

Зачисление в школу проводится на конкурсной основе, по результатам вступительных испытаний.

Ниже приводятся условия задач первого, заочного тура вступительной олимпиады по математике и физике или по математике и химии. Победители данной олимпиады, проводимой СУНЦ МГУ, будут приглашены на очный тур (в марте 2012 года, вместе с победителями еще нескольких заочных олимпиад – см. сайт), где получат возможность досрочно поступить в СУНЦ МГУ.

Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради, на обложке которой указываются фамилия, имя,

отчество (полностью), желаемый профиль обучения, подробный домашний адрес с индексом, контактные телефоны (домашний и мобильный), электронный адрес (если имеется), адрес и номер школы, класс.

Работу нужно отправить простой бандеролью (обязательно вложите конверт с маркой, заполненный на ваш домашний адрес с индексом) на имя Приемной комиссии по одному из следующих адресов:

121357 Москва, Кременчугская ул., 11, СУНЦ МГУ (жители Москвы принимают в школу без предоставления общежития), телефон Приемной комиссии: (499)445-11-08, сайт: <http://www.internat.msu.ru>, e-mail: priem@internat.msu.ru;

630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, СУНЦ НГУ (Олимпиадный комитет);

620137 Екатеринбург, ул. Голощекина, 30, СУНЦ УрГУ; 199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/96, Академическая гимназия.

Срок отправки работ – не позднее 20 февраля 2012 года (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут.

Если вы не сможете решить все задачи – не отчаивайтесь: Приемная комиссия рассмотрит работы с любым числом решенных задач.

Вступительные экзамены второго, очного тура будут проводиться с 20 марта по 20 мая 2012 года по регионам.

Вступительное задание заочного тура

Математика

Для поступающих в 10 класс

1. Выясните, не пользуясь таблицами и калькулятором, является ли число 3599999999 простым.
2. Найдите все такие пары чисел p и q , что каждое из чисел $2p$ и q является корнем уравнения $x^2 + px + q = 0$.
3. Найдите сторону AB треугольника ABC , если известно, что $AC = 4$, $BC = 6$, а отрезок, соединяющий центр вписанной окружности с точкой пересечения медиан, параллелен AB .
4. Найдите 19 последовательных натуральных чисел, сумма квадратов первых десяти из которых равна сумме квадратов следующих девяти чисел.
5. Диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника пересекаются в точке O . Найдите площадь четырехугольника, если $AC = m$, $BD = n$, а периметры треугольников AOB , BOC , COD и DOA равны.
6. В стране 10 городов, некоторые из которых соединены дорогами. Какое наибольшее число дорог может быть в этой стране, если в ней нет трех городов, из которых каждые два соединены дорогой, и нет двух городов, соединенных более чем одной дорогой?

Для поступающих в 11 класс

1. Представьте дробь $\frac{4}{17}$ в виде суммы нескольких различных дробей с числителем, равным 1, и натуральным знаменателем.
2. В треугольнике ABC проведены высота AH и биссектриса BE . Известно, что $\angle BEA = 45^\circ$. Найдите $\angle EHC$.
3. Решите систему

$$\begin{cases} x - y \geq 2, \\ x^2 + 4y^2 + 5 = 4z. \end{cases}$$
4. Существует ли натуральное число, делящееся на 2011, сумма цифр которого равна 2011?

5. Из точки O внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ площади 1 опущены перпендикуляры OK , OL , OM и ON на стороны AB , BC , CD и DA соответственно. Известно: $AK \geq KB$, $BL \geq LC$, $CM \geq MD$, $DN \geq NA$. Найдите площадь четырехугольника $KLMN$.

6. Из многоугольника можно получить новый многоугольник с помощью следующей операции: разрежем многоугольник по отрезку на две части, переворачиваем одну из частей

и приставляем к другой части по линии разреза, если при этом части не будут иметь других общих точек, кроме точек разреза. Можно ли с помощью таких операций превратить квадрат в треугольник?

Физика

(физико-математическое отделение)

Для поступающих в 10 класс

1. Шарнирная конструкция состоит из трех ромбов, стороны которых относятся как 3:2:1 (рис.1). Система находится в поле тяжести земли. Масса всей конструкции равна m . Вершину A перемещают верти-

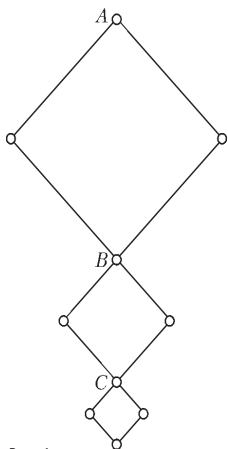


Рис. 1

кально вверх со скоростью v . Определите скорости вершин B и C . Какая сила прикладывается к вершине A ?

2. В тонкой U-образной трубке находится вода. В левое колено наливают слой масла высотой 10 см. На сколько повысится уровень воды в правом колене? Плотность масла 800 кг/м^3 .

3. На одном берегу залива, образующего клин с углом α , живет рыбак, дом которого находится в точке A (рис.2). Расстояние от точки A до ближайшей точки залива равно h , расстояние до конца залива равно l . На другом берегу залива, в точке B , находится дом другого рыбака. Точка B расположена симметрично точке A относительно залива. Определите минимальное время, необходимое первому рыбаку, чтобы добраться до второго, если в его распоряжении имеется лодка, причем скорость движения по заливу в лодке в два раза меньше скорости движения по суше, равной u .

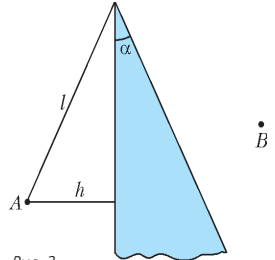


Рис. 2

4. Клин находится на горизонтальной гладкой поверхности. На клине с углом θ находится шайба массой m . Масса клина равна M , коэффициент трения между шайбой и клином равен μ . Изначально систему удерживают в положении равновесия. Потом шайбе сообщают скорость, равную v и направленную вверх вдоль клина. На какую максимальную высоту относительно начального положения поднимется шайба?

5. На гладком горизонтальном столе лежит плашмя тонкий обруч массой M . По периметру обруча намотана легкая нерастяжимая нить, за свободный конец нити мы тянем с силой F , направленной по касательной к обручу. С каким ускорением движется конец нити, за который мы тянем?

Для поступающих в 11 класс

1. См. задачу 3 для 10 класса.
2. См. задачу 4 для 10 класса.
3. См. задачу 5 для 10 класса.

4. В середине плоского конденсатора, заряженного до напряжения U , находится маленький металлический шарик радиусом r . Какой заряд появится на шарике, если его соединить проводником с одной из пластин конденсатора?

5. С идеальным газом проводят два процесса: 1-2 и 1-3 (рис. 3). Найдите, в каком из них к газу подведено большее количество теплоты, если кривая, на которой лежат точки 2 и 3, является: а) изотермой; б) адиабатой.

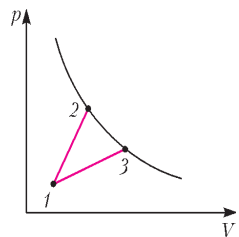


Рис. 3

Химия

(химико-биологическое отделение)

Для поступающих в 10 класс

1. С какими из перечисленных веществ может реагировать хлор и при каких условиях: 1) бромид натрия, 2) хлорид натрия, 3) гидроксид калия, 4) вода, 5) серная кислота?

Напишите уравнения соответствующих реакций, если они возможны.

2. При образовании 1 моль диоксида кремния из кремния и кислорода выделяется 910 кДж, а при образовании 1 моль оксида магния из магния и кислорода выделяется 602 кДж.

1) Может ли гореть смесь кварцевого песка и порошка магния без доступа воздуха? Для устойчивого горения

нужно, чтобы на 1 г смеси исходных веществ выделялось не менее 1,5 кДж.

2) Напишите уравнения реакций, приведите расчеты.

3) Известно, что горящие зажигательные бомбы с магний-евым корпусом тушили в ящиках с песком. Почему горящий магний можно тушить кварцевым песком?

О некоторых интересных конференциях школьников

Здесь мы кратко расскажем о¹

- Московской математической конференции школьников (ММКШ, проводится с 2007 года),

- семинаре учебно-исследовательских работ (проводится с 2008 года),

- секции математики Конкурса им. В.И.Вернадского (секция проводится с 2010 года, а сам конкурс проводится с 1993 года). Главной целью конференций школьников мы считаем развитие творческих способностей и – для того небольшого количества школьников, которые достигли соответствующего уровня, – приобщение к научной работе. Мы считаем важным поддерживать имеющуюся в России знаменитую «систему кружков», а не создавать новую систему. Если на кружке (спецкурсе, занятиях по «спецматематике» и т.д.) школьники творчески изучают материал и записывают решения некоторых задач, то иногда появляются такие решения, которые интересно показать более широкому кругу учеников. Они могут возникнуть на занятиях активно работающего математика и содержать новые результаты, а могут быть и самостоятельным переоткрытием известной теоремы. С другой стороны, если вести на кружке важную и тяжелую

работу по записи решений некоторых задач, то необходимо иногда из этой работы сделать праздник. Для него идеально подходят указанные конференции школьников.

Заседания конференций и семинара проходят очень живо и интересно. Содержание большинства докладов понятно школьникам и учителям; даже в сложных докладах приводятся яркие результаты и идеи доказательств, доступные широкой аудитории. Приводятся важные комментарии и задаются интересные вопросы. См., например, видеозаписи некоторых докладов ММКШ на указанном сайте.

За счет чего это получается? Перед принятием работы школьника на конференцию он дорабатывает доклад со специалистом по тематике работы, которого предлагает жюри. Иногда такая доработка превращается в переписывание работы и требует от школьника значительных усилий. Полученный в результате полный текст работы школьника (содержащий доказательства) не стыдно выложить на сайт конференции. Пока ММКШ – единственная математическая конференция школьников, на которой это делается. Увлеченному математикой школьнику такой серьезный труд и интересен сам по себе, и вознаграждается вниманием к его результату.

Семинар учебно-исследовательских работ и ММКШ включают не только доклады школьников, но и доклады математиков, предлагающих задачи для исследования.

Сроки подачи работ на конференции указаны на соответствующих интернет-страницах сайта МЦНМО. Тем, кто собирается участвовать в этих конференциях, мы настоятельно рекомендуем ознакомиться с примерами работ, опубликованными на указанном сайте. Это позволит получить представление об уровне и требованиях этих конференций.

А.Сгибнев, А.Скопенков

¹ Подробнее об этом можно прочитать на сайте МЦНМО на странице <http://www.mcsme.ru/mmks> (там же можно найти большое количество задач для исследования и примеров научных и учебно-исследовательских работ школьников). См. также статьи: А.Скопенков. «Размышления об исследовательских задачах для школьников»; А.Сгибнев. «Что такое исследовательская работа школьника по математике?», размещенные на этом же сайте.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(с.м. «Квант» №4)

1. Каждое число таблицы Пифагора равно произведению номера строки и номера столбца, в которых оно находится. Так как ладьи не угрожают друг другу, то в каждой строке таблицы расположена одна ладья, и в каждом столбце расположена одна ладья. Поэтому в произведение девяти чисел, замаскированных ладьями, каждое число от 1 до 9 войдет дважды в качестве множителя: один раз – как номер строки, второй раз – как номер столбца. Значит, это произведение всегда равно $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9)^2 = (9!)^2 = 131681894400$. Большое число получается!

2. 1:2.

Допустим, верным оказался прогноз **в** – «Север» выиграет. Тогда будут верны также прогнозы **а** – ничьей не будет, **б** – в

ворота «Юга» забьют, и **г** – «Север» не проиграет. Таким образом, верны уже не меньше четырех прогнозов, а по условию должны быть верны только три. Значит, «Север» не выиграл. Если при этом сбылся прогноз **г** – «Север» не проиграет, – то матч закончился ничьей, и прогнозы **в** и **д** точно не сбылись. В таком случае верными оказываются не больше двух прогнозов. Поэтому остается заключить, что сбылись прогнозы **а**, **б** и **д** (они не противоречат друг другу). Получаем, что всего было забито три мяча, в ворота «Юга» забили, но он выиграл – значит, «Север» проиграл «Югу» со счетом 1:2.

3. Можно.

На рисунке 1 приведен один из способов.

4. $0 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 96$.

Так как $8 \cdot \text{ОН} < 100$, то $\text{ОН} \leq 12$, т. е. $\text{О} = 1$, а Н равно 0 или 2. Но Н не может быть равно 0, так как тогда Я и Ы означали бы одну и ту же цифру. Значит, $\text{Н} = 2$. Таким образом, $8 \cdot \text{ОН} = 96$, значит, МЫ может быть равно 96, 97 или 98. Два последних случая не подходят, так как для них Я должно быть

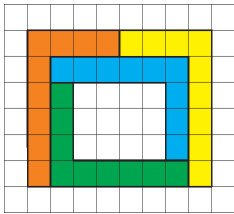


Рис. 1

равно 1 или 2, а эти цифры уже использованы. Итого, $MBI = 96$, а $Я = 0$.
5. Может.
 Вася берет кубики по одному «за ход» слева направо из переднего ряда верхнего слоя. Когда в ряду останется два кубика, он за ход забирает оба. Аналогично он забирает кубики из следующих рядов верхнего слоя, пока не останется два задних ряда. Далее он берет кубики парами за ход, по одному из каждого ряда, слева направо. Когда от верхнего слоя останутся 4 кубика в правом заднем углу, он за ход берет все 4. Так Вася снимает слой за слоем. Когда он начинает брать кубики из предпоследнего слоя, то действует так же, но вместе с каждым кубиком из этого слоя берет и кубик строго под ним.

ЗАДАЧИ

(см. с. 25)

- 1500 рублей должен взять Саша, а 2500 рублей – Валя. После покупки Саша остался должен Вале 500 рублей. Можно считать, что эти деньги он отдает из вырученных от продажи велосипеда. Значит, ему остается 1500 рублей, а Валя получит 2500 рублей.
 - 3, 4, 5, 6 или 7.
- Поскольку все вершины Васиного многоугольника являются вершинами треугольника или четырехугольника, то в нем не более семи вершин. Примеры приведены на рисунке 2.

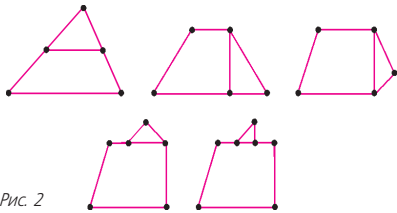


Рис. 2

- 25 лжецов.
 У каждого рыцаря количество друзей-рыцарей не меньше заявленной им разности. У каждого ученика не более 24 друзей, значит, 25-й – лжец. Поэтому у каждого из остальных не более 23 друзей-рыцарей, значит, 24-й – лжец. Аналогично, 23-й – лжец... Продолжая таким образом, получим, что все ученики этого класса – лжецы.
- В 4 раза.
 Пусть за 20 минут Вася проезжает расстояние s и догоняет Алешу в точке C . В этот момент Боря был в точке D (заметьте, что $BD = AC = s$), а позже он встретил Васю в точке E , $CE = s$ (рис. 3). От C до D Вася ехал 25 минут (поскольку $CD = s + DE = BE$), а до E – 20 минут. Значит, $CE = 4DE$. За те же 20 минут Боря проехал как раз расстояние DE . Поэтому его скорость в 4 раза меньше, чем у Васи.
- Можно.

Сначала упорядочим яблоки по массе: $a \leq b \leq c \leq d$. Пусть средняя масса a и b равна p , c и d – q , всех четырех – m . Тогда $m = \frac{p+q}{2}$ – середина отрезка $[p; q]$ – лежит правее p . Поэтому b ближе к m , чем a . Аналогично, c ближе к m , чем d . Чтобы выбрать между b и c , сравним $(a+d)$ и $(b+c)$.

Пусть средняя масса a и d равна u , b и c – v , тогда m – середина отрезка с концами u и v . Если $a+d < b+c$, то $u < v$, и m лежит левее v , поэтому m ближе к b (рис. 4).

Если $a+d > b+c$, то, аналогично, m ближе к c , а при $a+d = b+c$ массы b и c равноудалены от m .

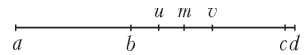


Рис. 4

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

- Ломоносов имел в виду равноплечные рычажные весы с разными длинами подвесов. Так, при взвешивании у поверхности Земли грузов массой по одному килограмму разность показаний на высоте примерно три метра давала бы ошибку в один миллиграмм.
- Этому препятствует не отсутствие тяготения между телами, а наличие сил трения, во много раз превосходящих силы притяжения.
- Ломоносов объяснил это своим законом сохранения движения; сегодня же мы опираемся на закон сохранения импульса, из которого следует, что приближение человека к берегу вызывает удаление от берега лодки.
- При упругом ударе покоящееся тело приобретет в два раза большую скорость, чем при неупругом.
- Спиртовой, так как коэффициент объемного расширения спирта больше, чем у ртути.
- По соображениям удобства за 0 градусов Ломоносов принял точку замерзания воды, а за 150 градусов – точку ее кипения.
- Уменьшится, так как относительная влажность будет больше, а испарение воды станет менее интенсивным.
- Плотно сложенные листы свинца образуют тонкие капиллярные каналы и щели, по которым ртуть, хорошо смачивающая чистый свинец, за счет сил поверхностного натяжения поднимается – подобно воде в капиллярных стеклянных трубках.
- Растекание чернил происходит из-за наличия капилляров между образующими рыхлую бумагу волокнами – чернила втягиваются в них, и линии, проведенные пером по бумаге, получаются размытыми.
- При наличии острых концов у проводников на них образуется настолько большая плотность зарядов, что окружающий воздух ионизируется и становится проводящим – заряды «стекают» с острия.
- Световой поток по выходе из окуляра телескопа гораздо уже широкого потока, поступающего в объектив, т.е. происходит концентрация световой энергии на меньшей площади.
- Перпендикуляры к зеркалам A_1 и A_2 должны составлять с падающими лучами углы $22^\circ 30'$, а перпендикуляры к зеркалам A_3 и A_5 – углы $67^\circ 30'$.
- Коллега Ломоносова Леонард Эйлер, разделявший с ним представления о свете как о волновом процессе, считал, что световое ощущение зависит от частоты, а не от длины световой волны. Частота же при переходе света из одной среды в другую не меняется.
- Это явление возникает в результате преломления солнечных лучей в протяженной и плотной атмосфере Венеры, открытой Ломоносовым.

Микроопыт

Роса образуется при охлаждении земной поверхности посредством излучения. Облака же препятствуют потере землей тепла таким способом.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ТОНКИЕ ЛИНЗЫ

1. Как рассеивающая линза.
2. $F = 6$ см.
3. $x = 2$ см.
4. $l = 80$ см.
5. $F = 32$ см.
6. $F_2 = 20$ см.
7. $a = 8$ см.
8. $D = 9$ дптр.
9. $F_2 = 16$ см.
10. $h = 6$ см.
11. $\Gamma = 0,5$.
12. $x'_{\max} = 15$ см.
13. $v' = 72$ мм/с.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XXXVII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. Пусть t – общий корень данных многочленов. Тогда $0 = P(P(t)) = P(P(0))$. Пусть $P(x) = x^2 + ax + b$; тогда $P(0) = b$, $P(1) = a + b + 1$, а значит, $0 = P(P(0)) = P(b) = ab + b^2 + b = b(a + b + 1) = P(0)P(1)$, что и требовалось доказать.

2. Обозначим $\angle OBA = \angle OAB = \alpha$, $\angle OBC = \angle OCB = \gamma$; тогда $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = 90^\circ - \alpha$. Поскольку четырехугольник $BPOQ$ вписан, $\angle OPQ = \alpha$ и $\angle OQP = \gamma$. Пусть OO_1 – высота треугольника OPQ , а H – точка пересечения прямых OO_1 и AC (рис.5). Без ограничения общности, точка H лежит на луче CA .

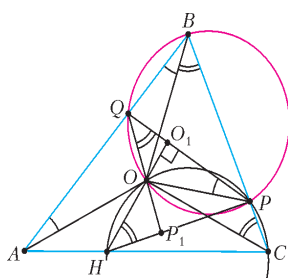


Рис. 5

– точка пересечения прямых OQ и PH . Вновь по свойству внешних углов

$$\angle QPH = \angle QPN + \angle PQO = \angle QPN + \angle PHO_1 = \angle HO_1Q = 90^\circ.$$

Итак, $PH \perp OQ$, т.е. H – точка пересечения высот треугольника OPQ . При этом она лежит на прямой AC , что и требовалось доказать.

Замечание. Нетрудно показать, что треугольники ABC и PHQ подобны.

3. 4016.

Указание. Покажем, что в выпуклом n -угольнике максимальное количество диагоналей, которое можно провести указанным способом, равно $2n - 6$; при $n = 2011$ тогда получится указанный ответ. Пусть $A_1A_2 \dots A_n$ – данный многоугольник. Тогда Петя может провести последовательно диагонали

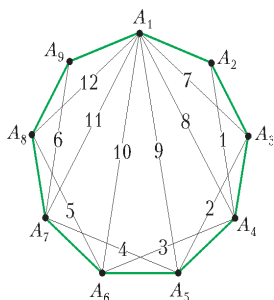


Рис. 6

$A_2A_4, A_3A_5, A_4A_6, \dots, A_{n-2}A_n$, а затем – диагонали $A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, \dots, A_1A_{n-1}$, итого $2n - 6$ диагоналей. На рисунке 6 приведен пример при $n = 9$.

Остается доказать, что в выпуклом n -угольнике нельзя провести больше $2n - 6$ диагоналей, чтобы выполнялось условие. Это несложно сделать по индукции.

4. Не существуют.

Предположим противное: пусть нашлись такие числа a, b, c . Заметим, что числа $a + b, b + c, c + a$ попарно взаимно просты. В самом деле, пусть, скажем, числа $a + b, b + c$ делятся на некоторое простое p . Поскольку $c^2 : (a + b), a^2 : (b + c)$, то числа c и a также делятся на p , а тогда и $b = (a + b) - a$ на него делится, что противоречит условию.

Далее, поскольку $a^2 : (b + c)$, число $(a + b + c)^2 = a^2 + (b + c)(2a + b + c)$ делится на $b + c$. Аналогично, оно делится на $a + b$ и на $c + a$. Так как последние три числа попарно взаимно просты, $(a + b + c)^2$ делится на $(a + b)(b + c)(c + a)$; в частности, $(a + b + c)^2 \geq (a + b)(b + c)(c + a)$. С другой стороны, ясно, что все числа a, b, c не меньше 2, значит,

$$\begin{aligned} (a + b)(b + c)(c + a) &= \\ &= (a^2b + b^2c + c^2a) + (ab^2 + bc^2 + ca^2) + 2abc > \\ &> (2a^2 + 2b^2 + 2c^2) + (2ab + 2bc + 2ca) > (a + b + c)^2. \end{aligned}$$

Противоречие.

6. $\frac{14}{5}$.

Будем рядом с каждой парой писать какой-нибудь квадратный трехчлен, корнями которого являются числа этой пары. Пусть в некоторый момент у мальчиков записаны трехчлены $p(x)$ и $q(x)$. Тогда они решали уравнение вида $\alpha p(x) = \beta q(x)$, где α, β – какие-то ненулевые числа. Значит, полученные числа – корни трехчлена $\alpha p(x) - \beta q(x)$. Если теперь один из мальчиков заменяет свои числа на эти корни, то можно считать, что рядом с ними будет записан трехчлен $\alpha p(x) - \beta q(x)$.

Обозначим исходные два трехчлена $p_0(x) = (x - 1)(x - 2)$ и $q_0(x) = (x - 3)(x - 4)$. Из сказанного выше теперь следует, что на каждом шаге у каждого мальчика написан трехчлен вида $\alpha p_0(x) + \beta q_0(x)$.

Итак, если на Петинном листке написано число 5, то у него записан трехчлен $a(x - 5)(x - x_2) = \alpha(x - 1)(x - 2) + \beta(x - 3)(x - 4)$. Подставляя $x = 5$, получаем $12\alpha + 2\beta = 0$, откуда $\alpha(x - 1)(x - 2) + \beta(x - 3)(x - 4) =$

$$= \alpha(-5x^2 + 39x - 70) = -\alpha(x - 5)(5x - 14).$$

Значит, второе число равно $x_2 = \frac{14}{5}$.

Замечание. Описанную ситуацию можно получить даже за один ход, если, например, Петя запишет трехчлен $x^2 - 3x + 2$, а Вася – трехчлен $6x^2 - 42x + 72$.

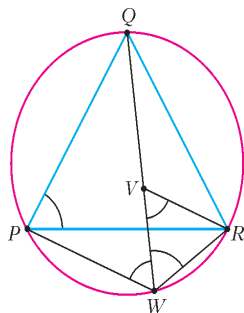
7. Докажем следующую известную лемму.

Лемма. Пусть PQR – правильный треугольник, и на меньшей дуге PR его описанной окружности выбрана точка W . Тогда $PW + RW = QW$.

Доказательство. Отметим на отрезке QW точку V такую, что $VW = WR$ (рис.7). Имеем $\angle VWR = \angle QPR = 60^\circ$, значит, треугольник RVW – правильный. Далее, $RQ = RP, RV = RW$ и $\angle PRW = 60^\circ - \angle VRP = \angle QRV$, значит, треугольники RVW и RWP равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда $QV = PW$ и $QW = QV + VW = PW + RW$. Лемма доказана.

Перейдем к решению задачи.

Из параллельности имеем $\angle ATX = \angle XTY = \angle CTY = 60^\circ$. Рис. 7



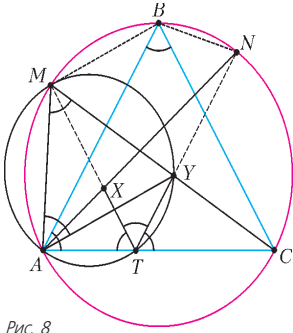


Рис. 8

Кроме того, $\angle AMY = \angle ABC = 60^\circ$. Тогда $\angle AMY + \angle ATY = 180^\circ$, значит, точки A, M, Y, T лежат на одной окружности (рис.8). Далее, $\angle MAY = \angle MTY = 60^\circ$, значит, треугольник MAY – правильный (два из его углов равны по 60°), T – точка на дуге AY его описанной окружности. Тогда по лемме $AT + TY = MX + TX$. Ана-

логично, $CT + TX = NY + TY$. Складывая эти два равенства, получаем $AC = AT + TC = MX + NY$.

Для треугольника ABC и точки M по лемме получаем $AM + MB = MY + YC$; поскольку $AM = MY$, получаем $CY = MB$. Аналогично, $AX = BN$.

В итоге,

$$P_{AXYC} = AC + AX + CY + XY = (MX + NY) + BN + BM + XY = P_{XMBNY},$$

что и требовалось доказать.

8. Не может.

Лемма. Для любой клетки доски X существует множество S , состоящее из четного количества клеток и содержащее X , такое, что у каждой клетки доски четное число соседей лежит в S .

Доказательство. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке; можно считать, что X – черная. Для начала рассмотрим одну из диагоналей, проходящих через X ; пусть A и B – центры двух крайних клеток этой диагонали, а C и D – точки, симметричные им относительно центра доски. Тогда обозначим через S множество всех черных клеток, центры которых лежат внутри или на границе прямоугольника $ABCD$. На рисунке 9 показаны возможные виды множества S на доске 8×8 (прямоугольники $ABCD$ обозначены пунктиром).

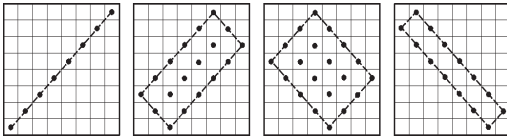


Рис. 9

Множество S состоит из четного числа клеток, поскольку количества центров клеток на сторонах AB и AD имеют разную четность. Далее, черные клетки не имеют соседей в S , каждая белая клетка внутри $ABCD$ граничит с четырьмя клетками из S , а каждая белая клетка вне него – либо с нулем, либо с двумя клетками из S . Итак, множество S удовлетворяет всем условиям. Лемма доказана.

Перейдем к решению задачи. Предположим, что существует ровно одна красивая клетка X . Рассмотрим для этой клетки множество S из леммы. Для каждой клетки этого множества посчитаем количество фишек в соседних с ней клетках; пусть g – сумма всех этих количеств. С одной стороны, в S четное число клеток, из которых ровно одна красива, а все остальные – нет; поэтому сумма g нечетна. С другой стороны, каждая клетка с фишкой имеет четное число соседей в S , поэтому она дает четный вклад в g ; значит, и g должна быть четной. Противоречие.

1. Пусть R_0 – первая строка таблицы. Рассмотрим любой набор из четного количества столбцов и пронумеруем их слева направо: $C_1, \dots, C_{2m}$. Тогда в таблице есть строка R_1 , отличающаяся от R_0 ровно в столбцах C_1 и C_2 ; далее, есть строка R_2 , отличающаяся от R_1 ровно в столбцах C_3 и C_4 ; ...; наконец, есть строка R_m , отличающаяся от R_{m-1} ровно в столбцах C_{2m-1} и C_{2m} (если $m = 0$, то $R_m = R_0$). Итак, строка R_m отличается от R_0 ровно в столбцах $C_1, C_2, \dots, C_{2m}$. Значит, строки R_m , построенные по различным наборам столбцов, различны. Поскольку количество наборов из четного числа столбцов равно $2^{10}/2 = 512$, то и количество строк в таблице не меньше 512.

Замечание. В таблице может быть ровно 512 строк – например, если в ее строках записаны все 512 последовательностей из 10 нулей и единиц, среди которых четное число нулей.

3. Предположим противное. Рассмотрим граф G , в котором люди являются вершинами, а два человека соединены ребром, если они знакомы. Тогда граф k -разбиваем, если его вершины можно правильно окрасить в k цветов (т.е. окрасить так, чтобы соседние вершины имели разные цвета). Мы будем пользоваться следующей известной леммой.

Лемма. Пусть в графе нет циклов нечетной длины. Тогда его вершины можно правильно раскрасить двумя красками.

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать лемму для связного графа. Расстоянием между двумя вершинами X и Y назовем наименьшую длину пути, соединяющего эти вершины.

Зафиксируем некоторую вершину A , и покрасим все вершины, находящиеся на нечетном расстоянии от A , в красный цвет, а остальные вершины – в синий цвет. Докажем, что указанная раскраска – искомая. Предположим противное – имеется ребро, соединяющее, скажем, красные вершины B и C . Рассмотрим кратчайшие пути $A = B_0, B_1, \dots, B_{2n-1} = B$ и $A = C_0, C_1, \dots, C_{2m-1} = C$, ведущие из A в B и в C . Взяв наибольший индекс i такой, что $B_i = C_i$, получим цикл нечетной длины $B_i, B_{i+1}, \dots, B_{2n-1}, C_{2m-1}, C_{2m-2}, \dots, C_i = B_i$. Противоречие. По лемме, в нашем графе G есть нечетный цикл – иначе его вершины можно окрасить даже в два цвета. Выберем в G нечетный цикл C минимальной длины n . Тогда не существует ребер, соединяющих вершины этого цикла, кроме ребер самого цикла. Действительно, любое такое ребро разбивает цикл на два меньших по длине, причем один из них нечетен. Значит, в этом случае нашелся бы нечетный цикл меньшей длины.

Далее, покажем, что любая вершина x , не принадлежащая C , соединена не более чем с двумя вершинами C . Если C содержит три вершины, то утверждение верно, иначе x вместе с вершинами C образует компанию из 4 попарно знакомых человек.

Пусть теперь в C больше трех вершин. Предположим, что x соединена с вершинами v_1, v_2, v_3 этого цикла. Участок цикла между какими-то двумя из них (скажем, между v_1 и v_2) содержит нечетное количество ребер d . Если $d < n - 2$, то этот участок вместе с вершиной x образует нечетный цикл длины $d + 2 < n$, что невозможно. Значит, $d \geq n - 2$, а это значит, что вершины v_1, v_2, v_3 идут в цикле подряд. Но тогда найдется цикл v_1, v_3, x длины 3, что невозможно.

Теперь мы можем предъявить требуемое разбиение: поместим в одну группу вершины цикла C , а в другую (назовем ее D) – все остальные. Вершины цикла C , очевидно, нельзя правильно окрасить в два цвета. Осталось показать, что между вершинами группы D есть ребро (тогда она 1-неразбиваема).

Предполагая противное, покажем, что G можно окрасить в три цвета. Сначала окрасим все вершины C , кроме одной, попеременно в цвета 1 и 2, а оставшуюся окрасим в цвет 3; по-

сколько между этими вершинами нет других ребер, раскраска этого цикла – правильная. Окрасим теперь вершины группы D по очереди. Каждая очередная вершина соединена не более

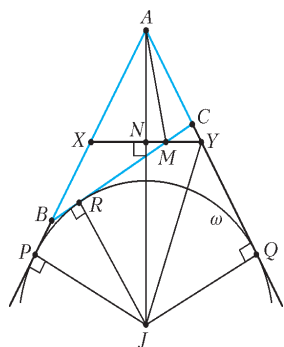


Рис. 10

чем с двумя вершинами из C , и не соединена с вершинами из D ; значит, можно выбрать для нее цвет, отличный от цветов ее соседей. Итого, граф G можно правильно окрасить в три цвета, что противоречит условию.

4. Поскольку отрезки BC и XY пересекаются, без ограничения общности можно считать, что $AB > AX$ и $AC < AY$.

Пусть (рис.10) вневписанная окружность ω касается стороны BC в точке R , а продолжений сторон AB и AC – в точках P и Q соответственно. Пусть J – центр ω , а r – ее радиус. Пусть также N – середина XY ; из симметрии N лежит на AJ , и $AN \perp XY$. Имеем

$$\begin{aligned} AP &= AQ = \frac{1}{2}(AP + AQ) = \frac{1}{2}(AB + BP + AC + CQ) = \\ &= \frac{1}{2}(AB + BR + AC + CR) = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = 2. \end{aligned}$$

Отсюда $AY = YQ = 1$.

Теперь по теореме Пифагора получаем

$$\begin{aligned} MR^2 &= MJ^2 - JR^2 = (MN^2 + NJ^2) - r^2 = \\ &= MN^2 + (YJ^2 - YN^2 - r^2) = \\ &= MN^2 + (YQ^2 + r^2) - (YA^2 - AN^2) - r^2 = MN^2 + AN^2 = AM^2, \end{aligned}$$

ибо $YA = YQ$.

Отсюда $AM = MR$, и периметр треугольника ACM равен $AC + CM + AM = AC + CM + MR = AC + CR = AC + CQ = AQ = 2$.

Замечание. Вычисления можно сократить, заметив, что прямая XY – радикальная ось окружности ω и точки A . Поскольку M лежит на этой прямой, получаем $MR = MA$.

5. Не могли.

Предположим противное. Если среди исходных чисел есть ноль, то для любого другого числа a имеем $a^2 - 0^2 = (a - 0)^2$. Значит, если вычеркнуть ноль, то останутся 9 чисел, также удовлетворяющих условию.

Итак, можно считать, что исходных чисел 9 или 10, и все они ненулевые. Пусть среди них есть числа разных знаков; рассмотрим минимальное и максимальное из них – обозначим их $a < 0 < b$. Тогда у Васи присутствует число $(b - a)^2$, которое больше как a^2 , так и b^2 ; у Пети же любое число не превосходит $\max(a^2, b^2)$. Противоречие.

Значит, все исходные числа – одного знака; заменив, если надо, все числа на противоположные, можно считать, что все они положительны. Опять обозначив через a и b соответственно минимальное и максимальное из этих чисел, имеем $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) > (a - b)^2 \geq (c - d)^2$, где c и d – произвольные два исходных числа. Тогда число $b^2 - a^2$ не встретится на листке у Пети, но встретится у Васи – противоречие.

11 класс

1. Поскольку числа $f = n/d$ и $f' = n/d'$ целые, а $f > f'$, имеем $f - f' \geq 1$, или

$$1 \leq \frac{n}{d} - \frac{n}{d'} = \frac{(d' - d)n}{dd'} < \frac{(d' - d)n}{d^2}.$$

Домножая на $\frac{d^2}{n}$, получаем $d' - d > \frac{d^2}{n}$, что и требовалось доказать.

2. Докажем сначала следующий известный факт.

Лемма. Ортоцентр треугольника после отражения относительно стороны попадает на описанную окружность.

Доказательство. Рассмотрим случай остроугольного треугольника (рис.11; остальные случаи аналогичны). Имеем $\angle H'C = \angle HNC = \angle A_1HC_1 = 180^\circ - \angle ABC$; это и означает, что точки A, B, C, H' лежат на одной окружности.

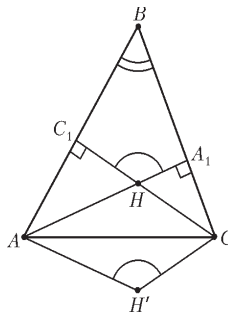


Рис. 11

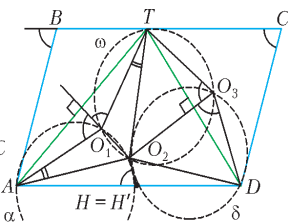


Рис. 12

Перейдем к решению задачи. Заметим, что O_1O_2 и O_2O_3 – серединные перпендикуляры к отрезкам AT и DT (рис.12). Значит, $\angle AO_1O_2 = \angle TO_1O_2 = \angle TBA$ (поскольку угол TO_1A – центральный для описанной окружности треугольника ABT). Аналогично,

$$\angle DO_3O_2 = \angle TO_3O_2 = \angle TCD.$$

Отсюда

$$\angle TO_1O_2 + \angle TO_3O_2 = 180^\circ.$$

Итак, точки T, O_1, O_2, O_3 лежат на одной окружности ω . Из симметрии, $\angle O_1TO_2 = \angle O_1AO_2$. Значит, окружность α , описанная около треугольника AO_1O_2 , равна ω . Аналогично, окружность δ , описанная около треугольника DO_2O_3 , также равна ω .

По лемме, ортоцентр H треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на окружностях α и δ , т.е. является второй точкой их пересечения. Пусть H' – вторая точка пересечения α с прямой AD . Тогда $\angle AH'O_2 = 180^\circ - \angle AO_1O_2 = \angle DO_3O_2$, поэтому H' лежит на δ . Значит, $H' = H$, и H лежит на AD .

3. Будем говорить, что две темы *пересекаются* по академику, если он интересуется обеими этими темами. Выберем наибольшее возможное количество непересекающихся тем; пусть это темы $T_1, \dots, T_k$. Предположим, что $k \leq 249$. Обозначим через S множество всех академиков, не интересующихся этими темами; тогда их ровно $s = 999 - 3k \geq 252$.

Для каждых двух академиков $a, b \in S$ существует единственная тема $T(a, b)$, интересующая обоих. При этом третий академик, заинтересованный ею, не должен принадлежать S , иначе $T(a, b)$ можно добавить к исходным k темам. Значит, его интересует какая-то тема T_i . Сопоставим эту тему (и этого академика) паре (a, b) .

Итак, каждой из $\frac{s(s-1)}{2}$ пар академиков из S сопоставлена

одна из k тем $T_1, \dots, T_k$; значит, какая-то тема T_i сопоставлена не менее чем $\frac{s(s-1)}{2k}$ парам. Обозначим эти пары

$(a_1, b_1), \dots, (a_d, b_d)$; пусть T_i интересует академиков x, y, z .

Поскольку $d > \frac{s}{2} > 6$, один из x, y, z сопоставлен хотя бы

трем парам (a_j, b_j) ; пусть, скажем, x сопоставлен парам $(a_1, b_1), \dots, (a_p, b_p)$ ($p \geq 3$), а остальным парам сопоставлены y или z .

Заметим, что все пары $(a_1, b_1), \dots, (a_p, b_p)$ не пересекаются: если бы академик a находился в двух из них, то академиком a и x интересовали бы две общие темы. Значит, $p \leq \frac{s}{2} < d$, и паре (a_{p+1}, b_{p+1}) сопоставлен, скажем, академик y . Но тогда

(a_{p+1}, b_{p+1}) не пересекается с одной из пар $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$, скажем, с (a_1, b_1) . Значит, можно из нашего набора тем выбросить T_i и добавить непересекающиеся темы $T(a_1, b_1)$ и $T(a_{p+1}, b_{p+1})$, увеличив количество непересекающихся тем.

Противоречие с исходным выбором.

5. Заметим, что у многочленов $F(x)$ и $G(x)$ не более чем по три корня, а у многочлена $F(x) - G(x)$ (имеющего степень не превосходящую 2) не больше двух корней. Поскольку у них в совокупности 8 корней, то у $F(x)$ и $G(x)$ ровно по три корня, а у $F(x) - G(x)$ ровно два, причем все они имеют кратность 1.

Предположим, что утверждение задачи неверно; пусть a и b — минимальное и максимальное из выписанных чисел, и $F(a) = F(b) = 0$. Поскольку все корни $G(x)$ лежат в интервале (a, b) , имеем $G(a) < 0$, $G(b) > 0$. С другой стороны, квадратный трехчлен $F(x) - G(x)$ имеет два корня на этом интервале, поэтому значения $F(a) - G(a) = -G(a)$ и $F(b) - G(b) = -G(b)$ должны иметь одинаковый знак. Противоречие.

7. Сделаем сначала замечание, общее для всех трех решений. Пусть p — нечетное простое число, а $a < p$ — натуральное число такое, что $a^2 + 1 \not\equiv p$; тогда числа a и $p - a$ различны, и

$P(a) = P(p - a) = p$. Действительно, числа $a^2 + 1$ и $(p - a)^2 + 1 = (a^2 + 1) + p(p - 2a)$ делятся на p и меньше p^2 ; значит, они не могут делиться на простые числа, большие p .

Первое решение. Предположим противное. Тогда существует лишь конечное число простых чисел p , для которых уравнение $P(x) = p$ имеет хотя бы три натуральных решения. Обозначим через s максимальное такое простое число (если таких простых не существует, положим $s = 2$), а через S — произведение всех простых чисел, не превосходящих s .

Пусть $p = P(S)$; тогда p взаимно просто с S и потому $p > s$. Пусть a — остаток от деления S на p ; тогда $a^2 + 1 \not\equiv p$, значит, $P(a) = P(p - a) = p$. Одно из чисел a и $p - a$ четно; обозначим его через b .

Далее, число $(b + p)^2 + 1$ делится на $2p$ (ибо b четно, а p — нет), поэтому $P(b + p) \geq p$. Если $P(b + p) = p$, то уравнение $P(x) = p$ имеет три решения — $b, p - b, p + b$; это невозможно по предположению. Значит, $P(b + p) = q > p$, число $(b + p)^2 + 1$ делится на $2pq$ и потому не меньше, чем $2pq$. Это означает, что $q < b + p$ (в противном случае

$$(b + p)^2 + 1 \leq (2p - 1)q + 1 < 2pq.$$

Наконец, обозначая через c остаток от деления числа $b + p$ на q , получаем $P(c) = P(q - c) = P(b + p) = q > p > s$, что противоречит выбору s .

Второе решение. Мы будем использовать тождество

$$(m^2 + 1)((m - 1)^2 + 1) = (m^2 - m + 1)^2 + 1, \quad (*)$$

которое можно проверить, например, раскрытием скобок. Из него следует, что $P(m^2 - m + 1) = \max(P(m), P(m + 1))$.

Предположим противное. Пусть N — наибольшее число, встречающееся в описанных тройках; если таких троек нет, то положим $N = 3$. Последовательность натуральных чисел $P(N + 1), P(N + 2), \dots$ не может строго убывать. Значит, найдется число $n > N + 1$, для которого $P(n - 1) \leq P(n)$. Тогда $P(n^2 - n + 1) = \max(P(n), P(n - 1)) = P(n)$. Поэтому найдется число $m \in [n, n^2 - n + 1]$ такое, что $P(m) \geq P(m + 1)$; иначе $P(n - 1) \leq P(n) < P(n + 1) < \dots < P(n^2 - n + 1)$, что не так. Теперь из $(*)$ имеем

$$P(m^2 - m + 1) = \max(P(m), P(m - 1)) = P(m)$$

и

$$P(m^2 + m + 1) = \max(P(m), P(m + 1)) = P(m).$$

Таким образом, тройка $m, m^2 - m + 1, m^2 + m + 1$ удовлетворяет условию, и $m > N$; противоречие с выбором числа N .

Третье решение. Для любого натурального $n \geq 1$ рассмотрим число $(2 + \sqrt{5})^{2n+1}$; оно имеет вид $a_n + b_n\sqrt{5}$ при некоторых натуральных a_n, b_n (ясно, что $a_n < a_{n+1}$). Заметим, что тогда $(2 - \sqrt{5})^{2n+1} = a_n - b_n\sqrt{5}$, откуда

$$a_n^2 - 5b_n^2 = (a_n + b_n\sqrt{5})(a_n - b_n\sqrt{5}) = ((2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}))^{2n+1} = -1.$$

Тогда $a_n^2 + 1 = 5b_n^2$; ясно, что $b_n < a_n$ и $a_n \geq 2^{2n+1} \geq 8$, поэтому все простые делители числа $a_n^2 + 1$ не превосходят $\max(5, b_n) < a_n$.

Итак, $p_n = P(a_n) < a_n$. С другой стороны, $a_n^2 + 1 \leq 5$, значит, $p_n \geq 5$. Обозначим теперь через c_n остаток от деления a_n на p_n . Тогда числа $c_n, p_n - c_n, a_n$ различны и $P(c_n) = P(p_n - c_n) = P(a_n)$. Мы предъявили бесконечно много различных троек требуемого вида.

Замечание. Уравнение вида $x^2 - Dy^2 = a$ называется *уравнением Пелля*. Известно, что, если D не является квадратом и это уравнение имеет хотя бы одно решение в натуральных числах, то оно имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XLV ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

1. $L = 5,3$ условных единиц.

2. 1) $M_r = 3m_{ш}$; 2) $\frac{E_{ш}}{E_k} = \frac{3}{4}$.

3. 1) $n_{min} = 8$; 2) $t = \frac{2t_1 + 3t_2}{5}$.

4. 1) $I_{AB} = \frac{11U}{3R}$, $R_{AB} = \frac{3}{11}R$; 2) сила тока максимальна в ребре 1-5 и равна $I_{max} = 2\frac{U}{R}$; 3) мощность максимальна в

ребрах 8-7, 5-6, 4-3 и равна $P_{max} = \frac{U^2}{R}$; 4) $I_{AC} = \frac{11U}{5R}$,

$R_{AC} = \frac{5}{11}R$.

5. 1) $S_1 : S_2 = 3 : 1$; 2) $L_1 : L_2 = 3 : 5$.

10 класс

1. 1) $\beta = \alpha$; 2) $\frac{T_{ш}}{T_{н}} = \frac{19}{8}$.

$$2. 1) A_{\max} = mq \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right) = 2,45 \cdot 10^{13} \text{ Дж};$$

$$2) m_b = \frac{A_{\max}}{\lambda(1 - T_1/T_0)} = 5,12 \cdot 10^7 \text{ кг}.$$

$$3. T = \frac{5}{4} T_0.$$

$$4. 1) \sigma_1 = \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon}{d(1 + \lambda_1/\lambda_2)}, \quad \sigma_2 = -\frac{2\varepsilon_0 \varepsilon}{d(1 + \lambda_2/\lambda_1)};$$

$$2) \sigma = -\frac{2\varepsilon_0 \varepsilon}{d} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

$$5. 1) C = 1 \text{ мкФ}; 2) U_{\infty} = \frac{9U_1 + 10U_2}{19} = 136 \text{ В};$$

$$3) Q = 0,062 \text{ Дж}.$$

11 класс

$$1. 1) T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}; 2) \text{ период уменьшится в } \sqrt{2} \text{ раз.}$$

$$2. 1) q < 0; 2) R = \sqrt{3} r = 17,3 \text{ см}; 3) \frac{[q]}{m} \approx 1,7 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}.$$

3. При $h = h_1$ равновесие устойчивое, при $h = h_2 = 360 \text{ мм}$ равновесие неустойчивое.

$$4. 1) I = \frac{U_0 C_0}{2\rho_0 \varepsilon_0}; 2) q_1 = \frac{C_0 U_0}{2}, \quad q_2 = -\frac{3C_0 U_0}{2}; 3) q = C_0 U_0;$$

$$4) W_9 = \frac{13}{24} C_0 U_0^2.$$

$$5. 1) N_1 = 71, \quad N_2 = 83; 2) \text{ во втором случае.}$$

III МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

1 (Д.Крачун). Ответ: $\{a, 5a, 7a, 11a\}$, $\{a, 11a, 19a, 29a\}$, где a – натуральное.

Пусть для определенности $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Положим $s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Заметим, что $a_2 + a_4 > a_1 + a_3$, значит, $s > a_2 + a_4 > \frac{s}{2}$, поэтому s не делится на $a_2 + a_4$. Аналогично, s не делится на $a_3 + a_4$. Значит, из шести пар индексов не более четырех пар $i < j$, для которых s делится на $a_i + a_j$. Значит, $n_4 \leq 4$.

Пусть $n_4 = 4$, тогда s должно делиться на $a_1 + a_2$, $a_1 + a_3$, $a_1 + a_4$, $a_2 + a_3$. Тогда $a_1 + a_4 \leq \frac{s}{2}$ и $a_2 + a_3 \leq \frac{s}{2}$, откуда $a_1 + a_4 = a_2 + a_3 = \frac{s}{2}$, и $a_4 = a_2 + a_3 - a_1$.

Далее, $s = 2(a_2 + a_3)$ делится на $x = a_1 + a_2$ и на $y = a_1 + a_3$.

Имеем $s = 2(a_2 + a_3) < 2(x + y) < 4y$, поэтому $\frac{s}{y}$ равно либо

2, либо 3. В первом случае $y = a_1 + a_3 = \frac{s}{2}$, что неверно (на самом деле $a_1 + a_3 < \frac{s}{2}$), значит, $y = \frac{s}{3} = \frac{2x + 2y - 4a_1}{3}$, откуда $y = 2x - 4a_1$. Заметим, что $y > x$, откуда $2x - 4a_1 > x$ и $x > 4a_1$. Но $s = 2x + 2y - 4a_1 = 2x + 2(2x - 4a_1) - 4a_1 = 6x - 12a_1$ должно делиться на x , поэтому $12a_1$ делится на $x > 4a_1$. Частное $\frac{12a_1}{x}$ может равняться 1 или 2.

В первом случае $x = 12a_1$, откуда $a_2 = 11a_1$, $y = 20a_1$, $a_3 = 19a_1$, $a_4 = a_2 + a_3 - a_1 = 29a_1$.

Во втором случае $x = 6a_1$, откуда $a_2 = 5a_1$, $y = 8a_1$, $a_3 = 7a_1$, $a_4 = 11a_1$.

Непосредственная проверка (или обращение предыдущих рассуждений) показывает, что найденные четверки удовлетворяют условию задачи.

3 (А.Пахареv). Подставив $y = z - x$ (очевидно, z может принимать любые значения), имеем

$$f(z) \leq f(x)z + (f(f(x)) - xf(x)). \quad (*)$$

Предположим, что нашлось x_0 такое, что $f(x_0) > 0$. Тогда, подставив в $(*)$ $x = x_0$, получаем, что $f(z)$ ограничена сверху линейной функцией от z с положительным угловым коэффициентом.

Это означает, что для любого числа c найдется x_1 такое, что $f(x) < c$ при $x < x_1$. В частности, найдется x_2 , для которого $f(x_2) < 0$; тогда, подставив в $(*)$ $x = x_2$, получаем, что $f(z)$ ограничена сверху линейной функцией от z с отрицательным угловым коэффициентом. Отсюда получаем, что найдется некоторое d такое, что $f(x) \leq d$ при любых значениях x .

Найдем $x_3 < 0$ такое, что при $x < x_3$ выполнено $f(x) < 0$.

Подставив $x < x_3$ в $(*)$, получаем $f(z) < f(x)z + d$ (так как $f(f(x)) < d$ и $xf(x) > 0$). Зафиксируем некоторое $z_0 > 0$ и подберем $x < x_3$ такое, чтобы неравенство $f(z) < f(x)z + d$

нарушалось (достаточно взять x такое, что $f(x) < \frac{f(z_0) - d}{z_0}$).

Получено противоречие. Наше предположение оказалось неверным, поэтому $f(x) \leq 0$ для всех x .

Положив в неравенстве из условия задачи $y = -x$, получаем $xf(x) + f(0) \leq f(f(x))$. Так как $f(f(x)) \leq 0$, то

$$xf(x) \leq -f(0). \text{ При } x < 0 \text{ тогда имеем } f(x) \geq \frac{-f(0)}{x}.$$

Если $f(0) = 0$, то утверждение задачи доказано (из доказанного для отрицательных x имеем $0 \leq f(x) \leq 0$).

Предположим теперь, что $f(0) < 0$. Пусть нашлось такое $x_4 < 0$, что $f(x_4) = 0$. Подставив $x = x_4$ в $(*)$, имеем $f(z) \leq f(0)$. При $z < -1$ это противоречит доказанному нера-

$$\text{венству } f(z) \geq \frac{-f(0)}{z}.$$

Наконец, предположим, что для всех $x \leq 0$ выполнено $f(x) < 0$. Подставив в равенство из условия задачи $y = 0$,

имеем $f(x) \leq f(f(x))$. Подставив $x = 0$ в $(*)$, имеем

$$f(z) \leq zf(0) + f(f(0)). \text{ Положив } z = f(x), \text{ имеем}$$

$$f(f(x)) \leq f(0)f(x) + f(f(0)), \text{ откуда}$$

$$f(x) \leq f(0)f(x) + f(f(0)) \text{ или } (1 - f(0))f(x) \leq f(f(0)).$$

Так как $f(0) < 0$ и $f(f(0)) < 0$, то $f(x) \leq \frac{f(f(0))}{(1 - f(0))}$. В правой

части последнего неравенства стоит фиксированное отрицательное число. Но при достаточно малых x это противоречит

$$\text{доказанному неравенству } f(x) \geq \frac{-f(0)}{x}.$$

4 (М.Григорьев). Ответ: $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1)$ (что также равно $\frac{(2n)!}{2^n n!}$).

Докажем индукцией по n следующий общий факт: пусть имеются гири массами $0 < x_1 < \dots < x_n$ такие, что каждая гиря весит больше, чем сумма всех гирь, которые легче нее; тогда количество способов f_n разложить гири по правилам из условия задачи равно $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$.

База индукции верна: для $n = 1$ имеется ровно 1 способ.

Предположим, что $n \geq 2$, и для $(n-1)$ гирь утверждение верно, т.е. $f_{n-1} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)$. Выделим одну из гирь – массой x_k , – которую будем класть на весы последней. Набор из всех гирь без гири массой x_k удовлетворяет условию (по-прежнему каждая гиря весит больше, чем сумма всех гирь, которые легче нее), поэтому имеется f_{n-1} способов разложить на весы эти $(n-1)$ гирь. Если $k \neq n$, то последнюю гирю массой x_k можно положить на любую чашу весов, если же $k = n$, то последнюю (самую тяжелую) гирю массой x_n можно положить только на левую чашу весов. Таким образом для каждого $k = 1, 2, \dots, n-1$ имеется $2f_{n-1}$ способов разложить гири так, чтобы последней была гиря массой x_k , а также имеется f_{n-1} способов разложить гири так, чтобы послед-

ней была гиря массой x_n . Итого общее количество способов

$$f_n = (n-1) \cdot 2f_{n-1} + f_{n-1} = (2n-1)f_{n-1} =$$

$$= (2n-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-3) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1).$$

5. (А.Циглер). Положив $n = 0$, имеем $f(m) - f(0) : f(m)$, значит, $f(0) : f(m)$; таким образом, функция f может принимать лишь конечное множество значений – все они делители $f(0)$. Предположим, что утверждение задачи неверно, и имеются пары целых чисел (t, k) со следующим свойством:

$f(t) > f(k)$, но $f(t)$ не делится на $f(k)$. Среди всех пар с указанным свойством выберем пару (t, k) , для которой $f(t)$ наибольшее. Положив $m = k + t$, $n = k$, получаем, что $f(k+t) - f(k) : f(t)$. Так как $f(k)$ не делится на $f(t)$ (ибо $f(t) > f(k)$), то $f(k+t)$ также не делится на $f(t)$. Имеем $f(t) \geq f(k+t)$, иначе пара $(k+t, t)$ удовлетворяла бы указанному свойству в противоречие с выбором пары (t, k) .

Итак, $f(t) \geq f(k+t)$, $f(t) > f(k)$, поэтому $|f(k+t) - f(k)| < f(t)$, значит, из делимости $f(k+t) - f(k) : f(t)$ следует равенство $f(k+t) = f(k)$. Теперь, полагая в условии задачи $m = k + t$, $n = t$, имеем $f(k+t) - f(t) : f(k)$, или $f(k) - f(t) : f(k) \Leftrightarrow f(t) : f(k)$. Получено противоречие, которое завершает доказательство.

6. Пусть T – точка касания l и Γ . Обозначим $A' = l_b \cap l_c$, $B' = l_c \cap l_a$, $C' = l_a \cap l_b$. Обозначим через X, Y, Z точки, симметричные точке T относительно прямых BC, CA, AB соответственно. Проекция точки T на стороны треугольника ABC лежат на одной прямой (прямая Симсона), поэтому точки X, Y, Z лежат на одной прямой (гомотетичной прямой Симсона с центром T и коэффициентом 2). Имеем $X \in B'C'$, $Y \in C'A'$, $Z \in A'B'$ (рис.13).

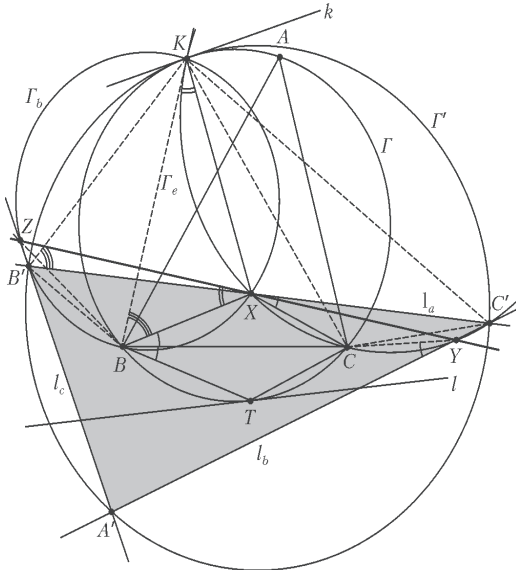


Рис. 13

Обозначим угол $\alpha = \angle(l, TC) = \angle CBT$. Из симметрии $\angle CBX = \angle CBT = \alpha$ и $\angle CXC' = \angle(l, TC) = \angle CYC' = \alpha$, отсюда следует, что точки X, Y, C, C' лежат на одной окружности Γ_c . Аналогично определим окружности Γ_a и Γ_b . Описанную окружность треугольника $A'B'C'$ обозначим Γ' . Окружности $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$ и Γ' пересекаются в точке K – точке Микеля четверки прямых $AB', B'C', C'A'$ и XY . Покажем, что K лежит на окружности Γ , причем касательные,

проведенные к Γ и Γ' в точке K , совпадают. Отсюда следует утверждение задачи.

Из симметрии $XB = TB = ZB$, значит, точка B – середина дуги XZ окружности Γ_b . Отсюда $\angle BZX = \angle BZX$. Аналогично $\angle CKX = \angle CXU$. Складывая эти равенства углов и еще раз используя симметрию относительно BC , получаем $\angle BKC = \angle BXZ + \angle CXZ = \angle BXC = \angle BTC$. Значит, K лежит на окружности Γ .

Пусть k – касательная к окружности Γ , проведенная через K . Тогда

$$\begin{aligned} \angle(k, KC') &= \angle(k, KC) + \angle CKC' = \angle KBC + \angle CXC' = \\ &= \angle KBX - \angle CBX + \alpha = \angle KB'X - \alpha + \alpha = \angle KB'C'. \end{aligned}$$

Итак, $\angle(k, KC') = \angle KB'C'$, а это означает, что k касается Γ' .

Замечание. Рассматриваемая конструкция находится в согласии с теоремой о пятерке точек Микеля (для данных пяти прямых точки Микеля всевозможных четверок из данных прямых лежат на одной окружности). Как известно, прямая XY проходит через ортоцентр H треугольника ABC . Тогда точки A, B, C, K, K являются пятеркой точек Микеля для всевозможных четверок из пяти прямых $A'B', B'C', C'A', XY, XY$ (здесь считаем XY, XY парой прямых, пересекающихся в H). Тогда A, B, C, K, K лежат на одной окружности, причем двукратное появление точки K соответствует касанию окружностей Γ и Γ' .

XLII МЕЖДУНАРОДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Задача 1

$$1.1. \omega_0 = \sqrt{\frac{Gm}{R(R+r)^2}} = \sqrt{\frac{GM}{r(R+r)^2}} = \sqrt{\frac{G(M+m)}{(R+r)^3}}.$$

$$1.2. r_1 = r_2 = R + r \text{ (три тела расположены в вершинах равностороннего треугольника), } \rho = \sqrt{r^2 + rR + R^2}.$$

$$1.3. \omega = \frac{\sqrt{7}}{2} \omega_0.$$

$$1.4. v_{\text{отн}} = \sqrt{3}v = \sqrt{3}\omega \frac{L}{2 \cos 20^\circ} = \sqrt{3} \frac{2\pi}{T} \frac{L}{2 \cos 20^\circ} \approx 1,7 \text{ км/с}.$$

Задача 2

$$2.1. \frac{\rho_1 T_1}{\rho_2 T_2} = 1 + \frac{4\sigma}{pR_0}. \quad 2.2. \frac{\rho_1 T_1}{\rho_2 T_2} - 1 = 0,0001.$$

$$2.3. T_{1\min} = \frac{R_0 \rho_1 T_1}{R_0 \rho_1 - 3\rho_2 l} \left(1 + \frac{4\sigma}{R_0 p}\right) = 300,04 \text{ К}.$$

$$2.4. u = \frac{2R_0 \rho l g}{3\eta} + \frac{8 R_0 \rho_1 g \sigma}{9 \eta p}. \quad 2.5. u = 0,36 \text{ м/с}.$$

$$2.6. \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^4 - \frac{R_1}{R_0} - \frac{q^2}{32\pi^2 R_0^4 p} = 0. \quad 2.7. \Delta R = \frac{q^2}{96\pi^2 \epsilon_0 R_0^3 p}.$$

$$2.8. q = \sqrt{\frac{36 R_0^3 \pi^2 p \epsilon_0 p}{\rho_2}} = 256 \text{ нКл}.$$

Задача 3

$$3.1. E_p = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad 3.2. f = -\frac{\alpha Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 r^3}.$$

$$3.3. U = -\frac{\alpha Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^4}. \quad 3.4. r_{\min} = \frac{b}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{\alpha Q^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 m v_0^2 b^4}}}.$$

$$3.5. S = \pi \sqrt{\frac{\alpha Q^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 m v_0^2}}.$$

ВСЕРОССИЙСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКЕ 2011 ГОДА

- $v_{\text{ср}} = \sqrt{v^2 - u^2 \sin^2 \alpha} - u \cos \alpha$.
- $F \Delta t = \frac{\sqrt{2} M v_0}{3}$. 3. $h = \frac{v_0^2 (\cos \alpha + 1/2)^2}{3g}$.
- $W = \frac{\rho L^2 H}{2} \left(\frac{\varepsilon^2 L^2}{B^2 s^2} - gH \right) + m \left(\frac{\varepsilon^2}{2B^2 L^2} - gH \right)$ (здесь ρ – плотность воды).
- $\eta = \frac{1}{\frac{1}{1-n^{2/5}} + \frac{5}{2 \ln n}}$.
- $E = -\frac{\sigma \sin \delta}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{\sin \delta \cos \delta \ln(1 - \cos \delta)}{1 + \cos \delta}$.
- $F = \frac{10qQ - 3Q^2 - 3q^2}{32\varepsilon_0 \pi R^2}$. 8. $L = \sqrt{\frac{\mu_0 q \rho m v}{\pi}}$.
- $a = \frac{l}{3}$; $a = \frac{2l}{3}$.

XXXII ТУРНИР ГОРОДОВ

(с.м. «Квант» №4)

ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

2. Назовем клетки, про периметры которых известно, что они целочисленны, *известными*, а остальные клетки – *неизвестными*. Поскольку строк и столбцов в получившейся таблице – по 11, а неизвестных клеток всего 10, мы можем отметить строку и столбец, в которых все клетки – известные. Возьмем неизвестную клетку K . Легко проверить, что ее периметр P равен $P_1 + P_2 - P_0$, где P_1 – периметр клетки отмеченного столбца, стоящей в одной строке с K , P_1 – периметр клетки отмеченной строки, стоящей в одном столбце с K , а P_0 – периметр клетки, стоящей на пересечении отмеченных строки и столбца. Так как все числа P_1 , P_2 и P_0 – целые, число P – тоже целое.

3. Можно.

В момент $\frac{1}{2^{10}}$ (часа) от начала процедуры отрежем от червяка $\frac{1}{2^{10}}$ метра. В момент $\frac{1}{2^9}$ от выросшей длинной части отрежем $\frac{1}{2^9}$ метра. В момент $\frac{1}{2^8}$ отрежем $\frac{1}{2^8}$ метра, ... в момент $\frac{1}{2}$ разрежем взрослого червяка пополам. К исходу часа все отрезанные куски станут взрослыми червями. При этом от первого разрезания прошло только $1 - \frac{1}{2^{10}}$ часа.

Замечание. Покажем, что быстрее, чем за $1 - 1/2^k$ часов получить $k + 1$ взрослых червячков нельзя. Понятно, что нет смысла делать больше k отрезаний. Пусть после какого-то разрезания мы хотим дождаться взросления меньшей части, чтобы ее разрезать. Тогда все время составит хотя бы час: полчаса на ее взросление и полчаса после ее разрезания на взросление новой меньшей части. Следовательно, мы всегда будем резать одну и ту же часть червя – большую. Сейчас докажем наше утверждение индукцией по k . База очевидна. Переход. Если при первом отрезании меньшая часть будет не больше $1/2^k$, то на ее взросление уйдет не меньше $1 - 1/2^k$

часов. Если же она будет больше $1/2^k$, то на взросление большей части потребуется больше $1/2^k$ часов, плюс время на получение из нее k взрослых червячков, которое по предположению не меньше $1 - 1/2^{k-1}$, т.е. всего больше $1 - 1/2^k$ часов. Утверждение доказано. Из него также следует, что для получения оптимального времени резать надо именно так, как указано в решении.

4. Не обязательно.

Всем условиям задачи удовлетворяет равнобедренная трапеция с меньшим основанием, равным боковой стороне, и углами в 72° при большем основании (рис.14). Такая трапеция получается, если отсечь диагональ треугольник от правильного пятиугольника.

5. 6) Сможет.

Сначала разложим монеты на две кучки: в первой 49 монет, во второй – 51 монета. Затем каждый день будем перекладывать по монете из первой кучки во вторую. На 25-й день в первой кучке будет 25 монет, во второй – 75. Стало быть, на 25-й день в первой кучке будет не больше 25 фальшивых и не больше 25 настоящих монет. Если такая же ситуация была и в первый день, то либо фальшивых, либо настоящих монет в первой кучке было ровно 25 штук (иначе всего монет там было бы не больше 48), и рыцарь освободился сразу. Иначе в первый день в первой кучке было больше 25 фальшивых или больше 25 настоящих монет. Заметим, что число как фальшивых, так и настоящих монет в первой кучке каждый день может измениться не больше, чем на 1, по сравнению с предыдущим днем. Поэтому в какой-то из дней между первым и 51-м число фальшивых или настоящих монет в первой кучке будет равно 25, что и требуется.

10–11 классы

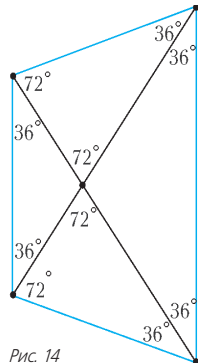
3. При $k = 1$, а также при k , для которых $k - 1$ не делится на 4.

Пусть $k > 1$. Пометим любой камень. Затем пометим камень, $(k - 1)$ -й по часовой стрелке после помеченного, и будем повторять эту процедуру, пока не вернемся к исходному камню. Любые два соседних помеченных камня будут концами ряда из k подряд идущих камней. Поэтому отмеченные камни можно перекрашивать только в паре с отмеченными. Стало быть, их удастся перекрасить тогда и только тогда, когда их четное число, и это число, как нетрудно проверить, равно 100

$\frac{\text{НОД}(100, k - 1)}{4}$. А четность этого числа равносильна неделимости $k - 1$ на 4. Осталось заметить, что все 100 камней разбиваются на $\text{НОД}(100, k - 1)$ наборов помеченных.

4. Пусть O – точка пересечения перпендикуляров, опущенных из вершин A, B, C и D пятиугольника $ABCDE$ на противоположные стороны. Нетрудно убедиться, что точка O не может совпадать с вершиной пятиугольника. Так как $OA \perp CD$, то $\vec{OA} \cdot (\vec{OC} - \vec{OD}) = 0$, т.е. $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = \vec{OA} \cdot \vec{OD}$. Аналогично из $OB \perp DE$, $OC \perp EA$, $OD \perp AB$ получаем равенства $\vec{OB} \cdot \vec{OD} = \vec{OB} \cdot \vec{OE}$, $\vec{OC} \cdot \vec{OE} = \vec{OC} \cdot \vec{OA}$, $\vec{OD} \cdot \vec{OA} = \vec{OD} \cdot \vec{OB}$. Но тогда и $\vec{OC} \cdot \vec{OE} = \vec{OB} \cdot \vec{OE}$, т.е. $\vec{OE} \cdot \vec{CB} = 0$. Значит, $OE \perp BC$.

Рис. 14



СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

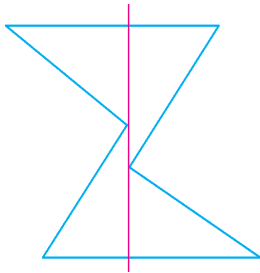


Рис. 15

1. Можно. См. рисунок 15.
2. 8950.

Картинка симметрична относительно прямой $y = x$, поэтому сумма абсцисс равна сумме ординат. Через начало координат проведем 180 прямых, прямая $y = 100 - x$ пересекает 179 из них. Для каждой точки на прямой $y = 100 - x$ сумма координат равна 100, значит, общая сумма абсцисс и ординат равна

17900, а сумма абсцисс – вдвое меньше.

3. Могут.

Пусть у барона гири всех четных весов – от 2 до 100. Допустим, нам удалось разложить все и получить равновесие. Тогда равенство сохранится, если все веса разделить на 2. Однако гири весами 1, 2, ..., 50 так разложить нельзя, поскольку сумма их весов нечетна.

4. Например, подойдут пары $(4N - 2, 1)$ и $(2N, 2N - 1)$ или $(N^2 + N, 1)$ и $(N^2, N + 1)$.

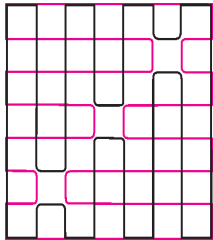


Рис. 16

6. 16 сторон.

Пример приведен на рисунке 16 (один маршрут черный, другой – красный).

Оценка. Каждый из муравьев посетил по 64 разные стороны. Всего сторон $7 \cdot 8 \cdot 2 = 112$. Следовательно, дважды посещенных сторон хотя бы $64 + 64 - 112 = 16$.

7. Первое решение. Пусть в таблице n строк. Возьмем в каждой строке пару наибольших чисел и выпишем эти $2n$ чисел в порядке

возрастания. Ввиду равенства сумм в пары входят первое и последнее, второе и предпоследнее и т.д. Отметим в таблице $n + 1$ наибольших из выписанных чисел. По принципу Дирихле найдутся два отмеченных числа в одном столбце; их сумму обозначим через s . По условию, $s \leq b$. С другой стороны, s не меньше суммы двух наименьших из отмеченных чисел, а это как раз центральная пара из выписанных чисел, и ее сумма равна a . Значит, $a \leq s \leq b$. Аналогично доказывается, что $b \leq a$.

Второе решение. Пусть $a > b$. Числа в таблице, не меньше $a/2$, назовем *большими*. В каждом столбце не больше одного большого числа. Тогда всего в ней не больше и не меньше, чем n больших чисел, т.е. их ровно n , причем в каждой строке и в каждом столбце ровно по одному большому числу. Пусть x – наименьшее большое число. В его строке найдется число $a - x$, которое не является большим. В столбце последнего найдется большое число, оно не меньше x . Мы нашли столбец и два числа в нем, сумма которых не меньше a , т.е. больше b . Противоречие.

10–11 классы

3. а) Могут.

Возьмем неравносторонний треугольник T и выберем в нем две различные стороны a и b . Возьмем также треугольник U , подобный T с коэффициентом a/b . Приставим их друг к другу сторонами длины a так, чтобы они не лежали в одной

плоскости. Две свободные вершины этих треугольников задают направление бокового ребра призмы, которое сделаем достаточно большим, чтобы призма имела непересекающиеся сечения, равные T и U .

- б) Не может.

Предположим, что такие спилы получились. Расстояния между боковыми ребрами призмы не превышают длины стороны треугольника, соединяющей точки на этих ребрах, т.е. не больше 1. Будем считать, что боковые ребра идут вертикально. Проведем через вершины большего спила три горизонтальные плоскости. Пусть вторая плоскость лежит между первой и третьей, и расстояния от нее до двух других равны a и b . Тогда стороны большого треугольника станут диагоналями прямоугольников ширины, равной расстоянию между соответствующими боковыми ребрами, а высоты равны a , b и $a + b$. Но если ширина прямоугольника с высотой a не больше 1, а длина диагонали равна 2, то $a \geq \sqrt{3}$. Аналогично $b \geq \sqrt{3}$. Но тогда высота третьего прямоугольника $a + b \geq 2\sqrt{3} > 2$, тем более его диагональ больше 2. Противоречие.

4. а) Не всегда.

Пусть длины синих палочек 12, 17, 20, а красных – 2, 23, 24. Поскольку единственная пара с разностью меньше 2 – это (23, 24), а после перекрашивания палочка 2 попадет в другую по составу тройку, то в ней разность наибольших сторон будет больше 2, и треугольник сложить будет нельзя.

- б) Не всегда.

Пусть $k = N - 2$. Пусть длины двух синих палочек равны $12k + 5$ и $24k - 4$, а длины остальных k равны 12; длины двух красных палочек равны $24k - 1$ и $24k$, а длины остальных равны $2/k$. Если перекрашена одна из длинных красных палочек, то разность между получившимися длинными красными палочками больше 2, и палочками длины $2/k$ ее не покрыть.

Пусть синей стала палочка $2/k$. Если палочка длины $24k - 5$ осталась синей, то сумма остальных синих не превосходит $2/k + 12(k - 1) + 12k + 5 < 24k - 4$. Если палочка длины $24k - 4$ стала красной, то наибольшей синей стала палочка длины $12k + 5$, но сумма остальных синих равна $12k + 2/k < 12k + 5$. В обоих случаях синий многоугольник не складывается.

5. Пусть O – точка пересечения прямых AB и CD , Ω_1 и Ω_2 – окружности, симметричные ω_1 и ω_2 относительно биссектрисы угла AOD . Рассмотрим окружности Ω_4 и Ω_3 , полученные из Ω_1 и Ω_2 инверсией относительно окружности с центром O и радиусом $R = \sqrt{OA \cdot OC} = \sqrt{OB \cdot OD}$. Они, очевидно, касаются. При этом Ω_4 проходит через точки C и D и может быть получена из Ω_1 не только инверсией, но и гомотетией с центром и коэффициентом $OD : OA = OC : OB$. Поэтому градусная мера дуги CD в Ω_4 равна α . Следовательно, Ω_4 совпадает с ω_4 . Аналогично, Ω_3 совпадает с ω_3 .

УСТНЫЙ ТУР ДЛЯ 11 КЛАССА

1. Первый игрок.

Пусть первый игрок всегда перекладывает одну и ту же монету. Тогда он всегда сможет сделать ход и, значит, выигрывает. Действительно, назовем расположение орлов и решек четным или нечетным в зависимости от того, в скольких позициях оно отличается от начального. Первый игрок всегда переходит от четного расположения к нечетному, второй – наоборот. Если первый игрок переходит к расположению, которое уже появлялось, то получить его раньше мог только он сам, причем переворачивая ту же монету. Значит, уже появлялось и расположение, из которого он делает ход, – противоречие.

2. Все 49 чисел различны, иначе суммы двух из них с третьим одинаковы вопреки условию. Пусть $a_1, \dots, a_{49}$ – числа на доске, занумерованные в порядке возрастания. Если

$a_{i+1} - a_i = a_{j+1} - a_j$ при каких-то $i < j$, то $a_{i+1} + a_j = a_{j+1} + a_i$, что возможно лишь в случае $j = i + 1$ (тогда сумма слева не является попарной суммой). Таким образом, среди разностей соседних по величине чисел на доске одинаковыми могут быть лишь две соседних. Значит, сумма всех этих разностей (т.е. разность между наибольшим и наименьшим числом) не меньше $2 \cdot (1 + 2 + \dots + 24) = 600$. Так как наименьшее из чисел на доске не меньше 1, то наибольшее не меньше 601.

3. Верно.

Перейдем в систему отсчета, связанную с центром O описанной окружности треугольника ABC . В этой системе точки A , B , C также движутся прямолинейно и равномерно; значит, если одна из них покинута, то и все три покоятся (иначе расстояния до них от O не будут все время равны), и задача решена. Итак, можно считать, что все три точки движутся по прямым a , b , c .

Квадрат расстояния от точки, движущейся со скоростью v по прямой, находящейся на расстоянии d от O , в момент времени t равен $v^2(t+m)^2 + d^2$ (где m – некая константа). Так как расстояния от точек A , B , C до O одинаковы в каждый момент времени, соответствующие квадратные трехчлены для них равны в бесконечном числе точек – а значит, равны по коэффициенту. Приравнявая последовательно коэффициенты при t^2 , t и 1 , получаем, что величины v , m и d для всех трех точек равны. Тогда, если «продолжить» движение точек на отрицательное время, то опять же расстояния от O до всех трех точек будут равны.

Поскольку значения d и m для всех точек равны, все точки одновременно оказываются в основаниях перпендикуляров из O на прямые a , b , c соответственно. Если затем все лучи, проведенные из O в наши три точки, вращаются в одном направлении, то все треугольники поворотно-гомотетичны, а значит, подобны. Иначе, скажем, лучи в точки A и B вращаются в одну сторону, а луч в точку C – в другую.

Пусть одна из прямых a , b , скажем, a , пересекает прямую c ; из симметрии, точки A и C одновременно приходят в точку пересечения a и c . Но это значит, что в исходной системе отсчета они тоже должны были встретиться; поскольку лучи, по которым они двигались, пересекаются (а дополнительные к ним – нет), то это произошло в положительный момент времени. Но это противоречит условию. Наконец, если прямые a , b параллельны, то две из них совпадают. Тогда точки, двигавшиеся по ним, встречались в основании перпендикуляра из точки O , что невозможно по тем же причинам.

4. Заметим сначала, что идеальных компаний не больше, чем количество различных подмножеств девушек – каждое такое подмножество если и дает идеальную компанию (вместе с какими-то парнями), то только одну (надо просто добавить всех парней, которым нравятся все эти девушки). Значит, компаний не больше $2^9 = 512$.

Приведем пример, когда компаний ровно 512. Пусть шести юношам из пятнадцати не нравится ни одна девушка. Оставшихся девять юношей занумеруем числами от 1 до 9, и девушки тоже.

Пусть юноше с номером i нравятся все девушки, кроме i -й. Тогда любой непустой набор девушек дает идеальную компанию из девяти человек (надо добавить юношей с номерами, отличными от номеров девушек), в частности, все девушки образуют идеальную компанию; пустой набор девушек тоже дает идеальную компанию – это все 15 юношей.

5. Если $a = 1$, то, очевидно, $b = 1$; при этом пара $(1, 1)$ подходит. Осталось разобрать случай $a, b > 1$. Заметим сразу, что a и b взаимно просты; пусть $a > b$. Число $A = a^{1000} + b^{1000} + 1 = a^{1000} + (b^{1000} + 1)$ делится на a^{619} ; аналогично, A делится на b^{619} , а из взаимной простоты – и на их произведение. Итак, $a^{1000} + b^{1000} + 1 \geq a^{619}b^{619}$, а зна-

чит, $a^{1001} \geq 2a^{1000} \geq a^{619}b^{619}$, или $a^{382} \geq b^{619}$. С другой стороны, $b^{1001} > b^{1000} + 1 \geq a^{619}$. Итак, $b^{1001 \cdot 382} > a^{619 \cdot 382} \geq b^{619 \cdot 619}$.

Но $1001 \cdot 382 < 619^2$ – противоречие.

6. Обозначим данные многоугольники через M_1 , M_2 , M_3 , их центры – O_1 , O_2 , O_3 ; также обозначим через T_{ij} пересечение многоугольников M_i и M_j (ясно, что многоугольники T_{ij} попарно не пересекаются). Тогда середина O_{12} отрезка O_1O_2 является центром симметрии, переводящей M_1 в M_2 ; значит, эта точка – центр симметрии многоугольника T_{12} . Утверждение задачи равносильно тому, что сумма площадей многоугольников T_{ij} не превосходит 1. Если один из них, скажем, T_{23} , пуст, то утверждение очевидно, ибо T_{13} и T_{12} расположены внутри M_1 и не пересекаются.

В противном случае рассмотрим многоугольник T'_{23} , полученный из T_{23} симметрией относительно O_{12} . Поскольку эта симметрия переводит M_2 в M_1 , а T_{12} – в себя, многоугольник T'_{23} лежит в M_1 и не пересекается с T_{12} .

Заметим, что многоугольник M_3 не пересекается с многоугольником M'_3 , симметричным ему относительно O_{12} ; иначе этому пересечению принадлежали бы две симметричные точки A и A' , а значит, и середина отрезка между ними, т.е. O_{12} . Но O_{12} лежит в T_{12} и, значит, не лежит в M_3 . Итак, M_3 и M'_3 не пересекаются, а значит, не пересекаются и лежащие в них многоугольники T_{13} и T'_{23} .

Итак, все три непересекающихся многоугольника T_{12} , T_{13} , T'_{23} лежат в M_1 , поэтому сумма их площадей не превосходит 1, что и требовалось доказать.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

(см. «Квант» №4)

Где ошибка?

1. Раскрыв скобки, мы получим уравнение вида $px^2 + qx + r = 0$, где p , q и r – некоторые числа. Если $p \neq 0$, то уравнение квадратное и имеет не более двух корней. Но мы знаем по крайней мере три корня (a , b и c). Значит, $p = 0$. Тогда получаем уравнение $qx + r = 0$, и если $q \neq 0$, у него один корень. Значит, $q = 0$. Но тогда и $r = 0$, иначе корней вообще нет. Мы доказали, что наше уравнение – это на самом деле тождество, и любое число x будет его корнем. Желающие могут раскрыть скобки и убедиться, что все сокращается.

2. Попробуем решить задачу «в лоб» – без теоремы Виета. Так как p и q – корни уравнения, то $p^2 + p^2 + q = 0$ и $q^2 + pq + q = 0$. Из второго равенства либо $q = 0$ – и тогда $p = 0$, либо $q + p + 1 = 0$ – и тогда, выражая q через p и подставляя в первое равенство, находим $p = 1$ или $p = -\frac{1}{2}$ (соответственно, $q = -2$, $q = -\frac{1}{2}$). Почему же третий ответ $p = -\frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$ потерялся при решении задачи с помощью

теоремы Виета? Потому что в этом случае числа p и q не являются обоими корнями уравнения – они равны друг другу и совпадают с одним из корней уравнения.

3. Ошибка в шаге индукции. Для доказательства шага мы должны рассмотреть произвольное разбиение треугольника на $n + 1$ треугольник. Если бы удалось *удалить* один из отрезков так, чтобы получить разбиение на n треугольников, утверждение было бы доказано: восстановив этот отрезок, мы нашли бы тупой угол. Но удалить так отрезок не всегда возможно, как показывает пример на рисунке к задаче. В приведенном же решении отрезок *добавляется* к разбиению на n треугольников, но так получаются не все разбиения на $n + 1$ треугольник.

4. Все зависит от того, какой толщины слой краски, которую мы наносим на стены. Если он какой-то определенный (ска-

жем, 1 мм), то краски, конечно, не хватит, если поверхность имеет бесконечную площадь.

Но посмотрим, какова будет толщина слоя краски на стенах, если просто залить всю башню краской. В каждой комнате слой будет, уж конечно, не толще, чем максимум из высоты, длины и ширины комнаты. Но размеры верхних комнат становятся все меньше и меньше (стремятся к нулю), так что и слой краски в верхних комнатах становится все тоньше и тоньше (тоже стремится к нулю). И итоговый объем нужной краски (при указанных в условии размерах комнат) оказывается конечным. Это и спасает слугу.

5. На самом деле угол CAN будет больше развернутого (сделайте точный рисунок!).

6. В первой цепочке равенств ошибки нет (заметьте, что $(\ln 2x)' = (\ln 2 + \ln x)' = 0 + \ln x = \ln x$). Ошибка в первом равенстве второй цепочки: второй знак производной по-прежнему означает дифференцирование по x , а не по u , но интерпретируется как дифференцирование по u . Чтобы второй знак означал дифференцирование по u , необходимо домножить подинтегральное выражение на производную u по x , т.е. на 2.

Правильная цепочка равенств такова:

$$\int_1^2 (\ln 2x)' dx = \frac{1}{2} \int_2^4 2(\ln u)' du = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2.$$

7. Справочники не врут. Ошибка в том, что интеграл вычисляется не от той величины. Под интегралом должен стоять квадрат длины вектора, проведенного под углом φ к оси абсцисс из O в соответствующую точку эллипса. Но этой точкой вовсе не будет точка $R(\varphi)$ с координатами $(a \cos \varphi; b \sin \varphi)$ – тангенс угла наклона $OR(\varphi)$ равен $\frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi$ и отличен от $\operatorname{tg} \varphi$ (при $a \neq b$).

Нас ввело в заблуждение то, что $R(\varphi)$ тоже пробегает весь эллипс при изменении угла φ от 0 до 2π , но это не та параметризация, которая нам нужна.

Найти площадь эллипса легко из геометрических соображений. Так как он получается из круга радиуса 1 растяжением – вдоль оси абсцисс в a раз и вдоль оси ординат в b раз, – то его площадь равна площади этого круга, умноженной на ab , т.е. как раз $ab\pi$.

Год ЮБИЛЕЕВ

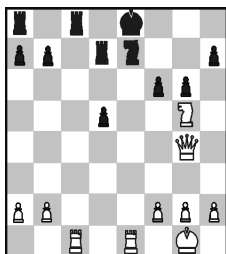
Завершающийся 2011 год в шахматном отношении можно назвать суперюбилейным. Судите сами: 175 лет исполнилось бы первому чемпиону мира Вильгельму Стейницу, 110 – пятому, Максиму Эйве, 100 – шестому, Михаилу Ботвиннику, 90 – седьмому, Василию Смыслову, 75 – восьмому, Михаилу Талю. 60 лет отметил 12-й шахматный король Анатолий Карпов (слава Богу, жив). Приведем несколько эффектных партий юбиляров.

В.Стейниц – К.Барделебен

Гастингс, 1895

Итальянская партия

1. e4 e5 2. ♘f3 ♘c6 3. ♘c4 ♘c5 4. c3 ♘f6 5. d4 ed 6. cd ♘b4+ 7. ♘c3 d5?! 8. ed ♘:d5 9. 0-0 ♘e6 10. ♘g5 ♘e7 11. ♘:d5 ♘:d5 12. ♘:d5 ♘:d5 13. ♘:e7 ♘:e7 14. ♘e1 f6 15. ♘e2 15... ♘d7 16. ♘ac1 c6. Естественный ход, но он позволяет белым провести блестящий прорыв в центре. 17. d5!! Классический прорыв в центре. 17...cd 18. ♘d4 ♘f7 19. ♘e6 ♘hc8 20. ♘g4 g6 21. ♘g5+! ♘e8. Теперь следует фантастическая комбинация, которая и сегодня не утратила своей красоты.



22. ♘:e7+! ♘f8. Ладья «отравлена»: 22... ♘:e7 23. ♘e1+ ♘d6 24. ♘b4+ ♘c7 25. ♘e6+ ♘b8 26. ♘f4+ ♘c7 27. ♘:c7 ♘:c7 28. ♘e8×.

23. ♘f7+! ♘g8. Ладья чувствует себя полной хозяйкой на седьмой горизонтали, она неприкосновенна из-за ♘:c8+. 24. ♘g7+! ♘h8 25. ♘:h7+! Черные сдались.

Это одна из самых красивых комбинаций в истории шахмат.

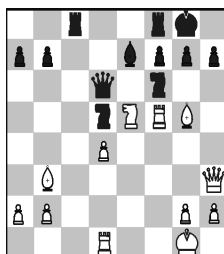
М.Ботвинник – М.Видмар

Ноттингем, 1936

Ферзевый гамбит

1. c4 e6 2. ♘f3 d5 3. d4 ♘f6 4. ♘g5 ♘e7 5. ♘c3 0-0 6. e3 ♘bd7 7. ♘d3 ♘c8. 0-0 cd 9. ed de 10. ♘:c4 ♘b6 11. ♘b3 ♘d7 12. ♘d3 ♘bd5 13. ♘e5

♘c6 14. ♘ad1 ♘b4 15. ♘h3 ♘d5 16. ♘:d5 ♘b:d5? Не тем конем, после 16... ♘f:d5 17. ♘c1 ♘c8 черные благополучно держались. 17. f4 ♘c8 18. f5 ef. После 18... ♘d6 19. fe fe позиция сохранялась достаточно напряженной. 19. ♘:f5 ♘d6. Теперь Ботвинник проводит одну из своих знаменитых комбинаций, давно ставшую учебным примером.



20. ♘:f7!! ♘:f7 21. ♘:f6 ♘:f6. Или 21... ♘:f6 22. ♘:f6 ♘:f6 23. ♘:c8+. 22. ♘:d5 ♘c6 23. ♘d6. После 23. ♘c5? неожиданно верх брали черные: 23... ♘:d4+!

23... ♘e8 24. ♘d7. Черные сдались.

Эта победа отмечена призом за красоту.

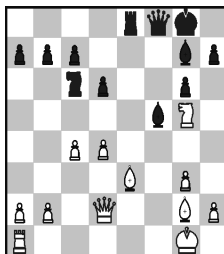
Р.Торан – М.Таль

Оберхаузен, 1961

Английское начало

Не так часто удается разгромить противника черными в 25 ходов, пожертвовав при этом несколько фигур, включая ферзя. Но Талю это удавалось не раз.

1. c4 e5 2. ♘c3 d6 3. g3 f5 4. d4 e4 5. f3 ♘f6 6. ♘g2 ef 7. ♘:f3 g6 8. 0-0 ♘g7 9. e4 fe 10. ♘g5 0-0 11. ♘g:e4. Следовало сохранить опасного коня на g5, продолжая 11. ♘:c4. 11... ♘:e4 12. ♘:f8+ ♘:f8 13. ♘:e4 ♘c6 14. ♘e3 ♘f5 15. ♘d2. Потеря важного темпа: неприятельская ладья занимает линию «е», и в лагере белых становится неспокойно. 15... ♘e8 16. ♘g5.



16... ♘e3! 17. ♘d5+. После 17. ♘:c6 ♘d3 партнеры могли по очереди

жертвовать ферзя: 18. ♘:d3 ♘:d3 19. ♘d5+ ♘h8 20. ♘f7+ ♘:f7 21. ♘:f7 ♘:d4+ 22. ♘g2 ♘:b2 23. ♘d1, и белые держались. 17... ♘h8 18. ♘f7+ ♘:f7! А теперь ферзя жертвуют только черные. 19. ♘:f7 ♘d3! В этом соль комбинации. Напрашивалось 19... ♘:d4+, но после 20. ♘g2 ♘d3 у белых был неприятный ответ 21. ♘h6!

20. ♘e2. У черных за ферзя всего две легкие фигуры, но трудные проблемы приходится решать противнику. 20... ♘:d4+ 21. ♘g2 ♘e5 22. ♘d1 ♘e3 23. ♘f1 ♘e4+ 24. ♘h3 ♘f3 25. ♘e2 ♘f5+. Белые сдались.

И эта партия удостоена приза за красоту.

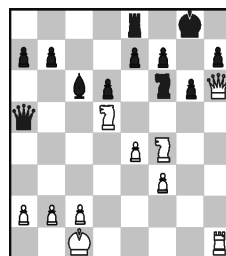
А.Карпов – В.Корчной

Финальный матч претендентов
2-я партия

Москва, 1974

Сицилианская защита

1. e4 c5 2. ♘f3 d6 3. d4 cd 4. ♘:d4 ♘f6 5. ♘c3 g6 6. ♘e3 ♘g7 7. f3 ♘c6 8. ♘d2 0-0 9. ♘c4 ♘d7 10. h4 ♘c8 11. ♘b3 ♘e5 12. 0-0-0 ♘c4 13. ♘:c4 ♘:c4 14. h5 ♘:h5 15. g4 ♘f6 16. ♘de2! Укрепляя пункт c3 и не допуская типовой жертвы качества. 16... ♘a5. Надежнее 16... ♘e8, чтобы на 17. ♘h6 отступить слоном в угол. 17. ♘h6 ♘:h6 18. ♘:h6 ♘fe8 19. ♘d3! Подготовлено специально к матчу. Избыточно защищая пункт c3, белые освобождают коня e2. 19... ♘4c5 20. g5! Начало эффектной комбинации. 20... ♘:g5 21. ♘d5! ♘:d5 22. ♘:d5 ♘e8 23. ♘ef4 ♘c6. На 23... ♘e6 следовало 24. ♘e6 fe 25. ♘:f6+ ef 26. ♘:h7+ ♘f8 27. ♘:b7 ♘g5+ 28. ♘b1 ♘e7 29. ♘b8+ ♘e8 30. ♘:a7 ♘e7 31. ♘b8+ ♘e8 32. ♘:d6+ – своеобразная «мельница».



24. e5! ♘:d5 25. ef ef 26. ♘:h7+ ♘f8 27. ♘h8+. Черные сдались.

Е.Гук